



حسابان ۲

نهایی فوول



فصل ۱ :

تابع

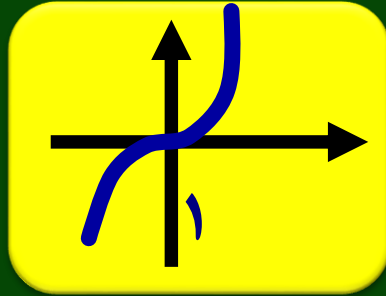
انتقال

بینیم با هریک از اعمال زیر، نمودار تابع $f(x)$ چگونه انتقال می‌یابد :

$$f(x) + k$$

۱

نمودار $f(x)$ ، k واحد و در جهت علامت k ، روی محور y ها حرکت برده!



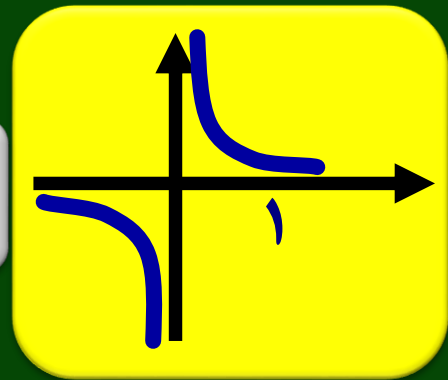
$$y = x^3 - 1$$

ex

$$f(x + k)$$

۲

نمودار $f(x)$ ، k واحد در فلاف جهت علامت k ، روی محور x ها حرکت برده!



$$y = \frac{1}{x-1}$$

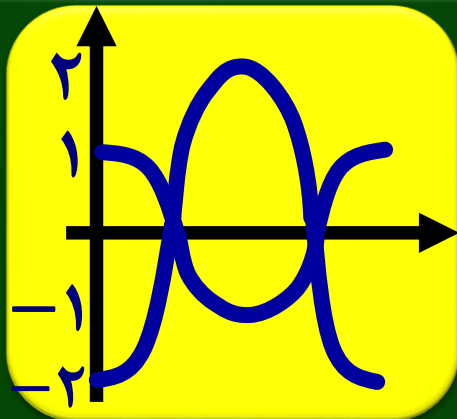
ex

مثال: نمودار تابع $y = -2(x-1)^3 + 1$ را به کمک انتقال رسم کنید.

answer

ex

$$y = -2 \cos x$$

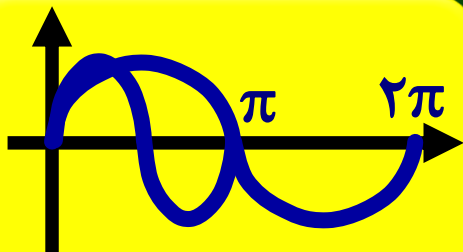


$$kf(x) \quad ۳$$

عرض نقاط روی نمودار $f(x)$ ، k برابر کن (سقف و کف k برابر شه)

ex

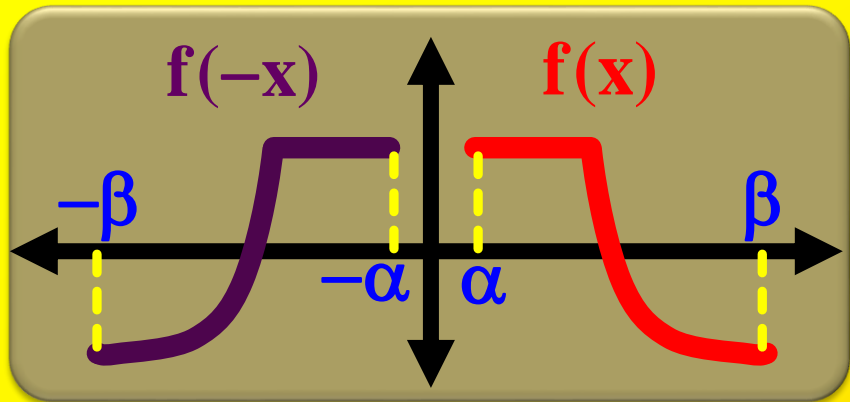
$$y = \sin 2x$$



$$f(kx) \quad ۴$$

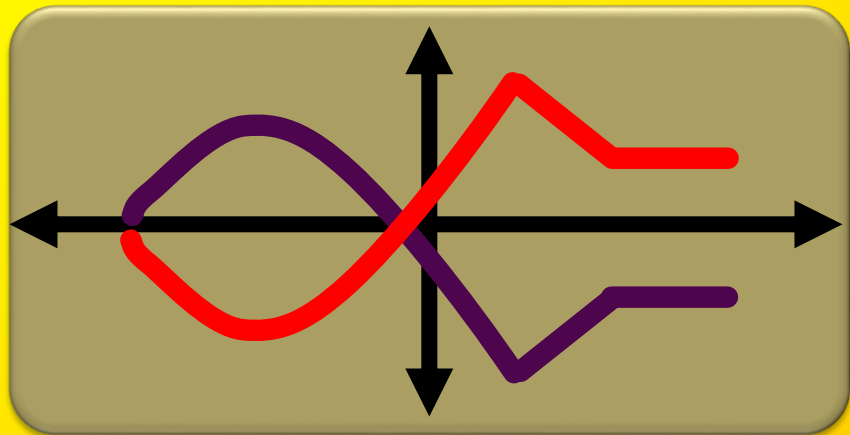
طول نقاط روی نمودار $f(x)$ ، $\frac{1}{k}$ برابر کن (در واقع دامنه $\frac{1}{k}$ برابر شه)

نکته برعکس!



نمودار تابع $f(-x)$ قرینه‌ی نمودار $f(x)$ نسبت به محور y ها است.

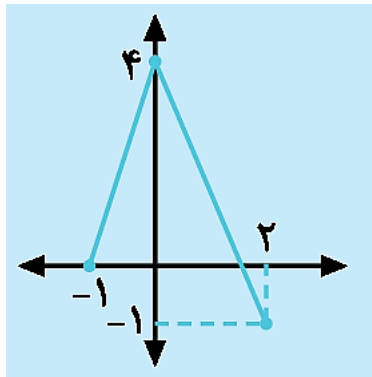
۱



نمودار تابع $-f(x)$ قرینه‌ی نمودار $f(x)$ نسبت به محور x ها است.

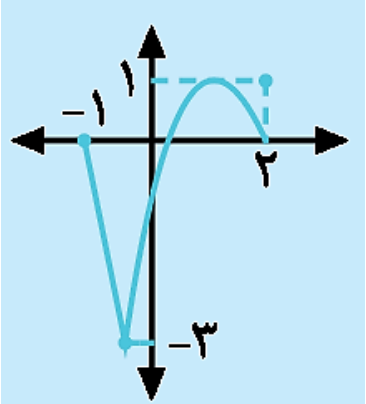
۲

مثال: (مثال کتاب با تغییر) در شکل زیر، نمودار $y = f(x)$ داده شده، به کمک آن نمودار $y = -\frac{1}{2}f(x) + 1$ رسم کنید.



answer

مثال: نمودار تابع g داده شده است. به کمک آن نمودار $g(-\frac{x}{2})$ را رسم کنید.



answer

مثال) کار در کلاس) الف) نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را با دامنه $[0, 4]$ رسم کنید و برد تابع را مشخص کنید.

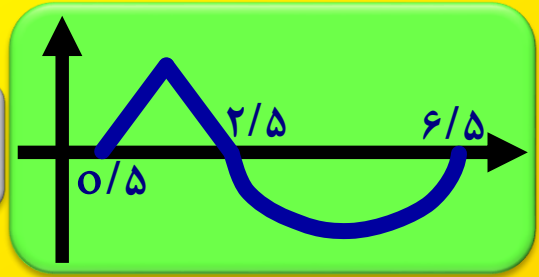
ب) نمودار تابع $k(x) = f(x - 2)$ و $g(x) = f(x) + 3$ را به کمک انتقال رسم کنید و دامنه و بردشان را با f مقایسه کنید.

answer

روش سرهنگیزه‌ی رسم $f(ax+b)$

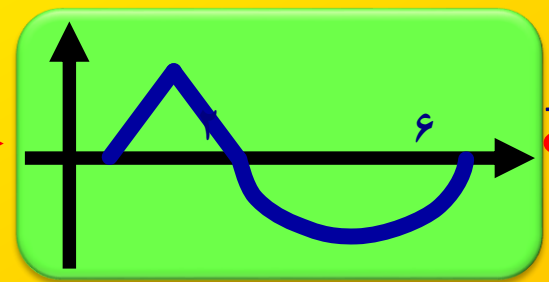
ایکس رو تنها کن و هر کاری داری میکنی تا ایکس تنها شه، دقیقاً همون کارو برای ایکسای نمودار هم انجام بده! دقیقاً همون بلا! نه برعکسش و اینا!

ex نمودار $f(x)$

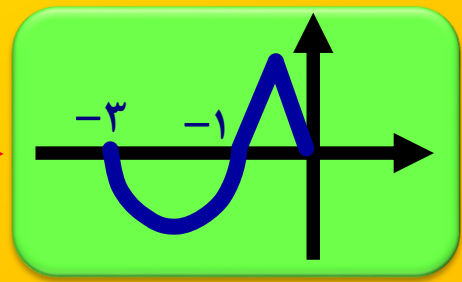


نمودار $f(-2x + 0/5)$
را به دست آورید پیلینز!

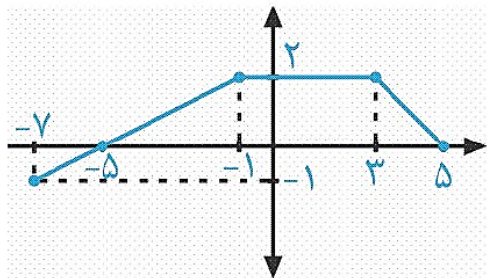
ایکس رو تنها کن
(اول منهای نیم)



$\div (-2)$



مثال) (مثال کتاب درسی) اگر نمودار تابع $g(x) = f(2x+1)$ به صورت زیر باشد، نمودار تابع $f(x)$ را به کمک آن رسم کنید.



answer

تابع چند جمله‌ای

توابعی که از جمع و تفریق چند جمله به وجود می آیند!

توانی حسابی از ایکس

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + c$$

ضریبش!

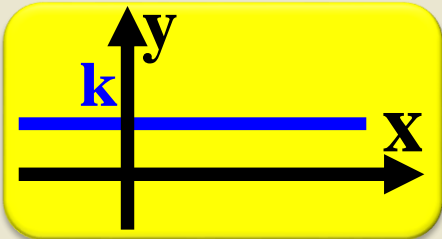
به جملش!

درجه یک چند جمله‌ای رو بزرگترین توانش مشخص میکنه!

$f(x) = -3x^4 + 5x^5 - 3$ $\xrightarrow{\text{درجه}}$ **5**

$f(x) = 2x^1 - 3x - \frac{1}{x} + 3$ $\xrightarrow{\text{درجه}}$ ~~⊗~~

توابع چند جمله‌ای خاص



تابع ثابت $y = k$ و نمودارش یک خط افقی است.



$f(x) = (m^3 - 6m^2 + 12m - 8)x^2 - (n^2 - mn - 3)x + \sqrt{-mn}$ تابعی ثابت است. $m + n$ ؛

۲ تابع خطی ضابطه‌ی آن $f(x) = mx + d$ است و نمودارش خطی است با شیب m و عرض از مبدأ d

پُر واضح است که تابع خطی یک چند جمله‌ای از نوع درجه یک می‌باشد.

T

تابع f با ضابطه $f(x) = (a-2)x^2 + bx + c - 2$ بیانگر یک تابع خطی است که در نقطه ای

به عرض ۱- محور عرض ها را قطع کرده است. این تابع در ربع سوم با محورهای مختصات، مثلثی

با مساحت ۲۴ ایجاد کرده است. مقدار b کدام است؟ (۱) $\frac{1}{24}$ (۲) $\frac{1}{48}$ (۳) $-\frac{1}{48}$ (۴) $-\frac{1}{24}$

A

مثال (فعالیت) الف) نمودار تابع $f(x) = x^3$ را از طریق نقطه‌یابی رسم کنید و دامنه و برد آن را بیابید.

ب) به کمک نمودار رسم شده برای تابع $f(x) = x^3$ ، نشان دهید f^{-1} وارون‌پذیر است.

پ) نمودار f^{-1} و ضابطه آن را به دست آورید.

answer

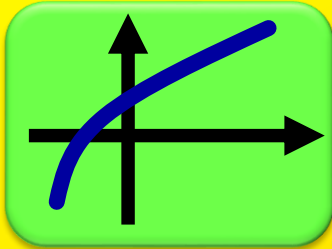
مثال) کار در کلاس کتاب) نمودار تابع $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.

answer

یکنوایی توابع

از نظر یکنوایی یک تابع به مدل‌های زیر تبدیل می‌شود :

$$f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 8)\}$$



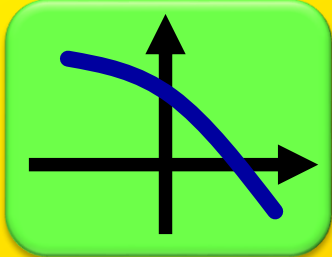
$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

صعودی اکید

۱

با افزایش مقدار x ، مقدار y افزایش می‌یابد

$$f = \{(1, 8), (2, 5), (3, 4)\}$$



$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

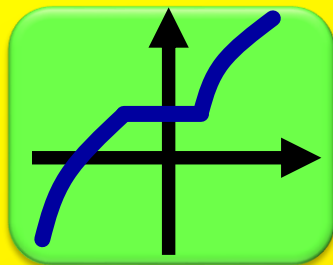
نزولی اکید

۲

با افزایش مقدار x ، مقدار y کاهش می‌یابد

به توابع نزولی اکید یا صعودی اکید، **یکنوایی اکید** (اکیدا یکنوا) می‌گویند!

$$f = \{(1, 2), (2, 2), (3, 8)\}$$



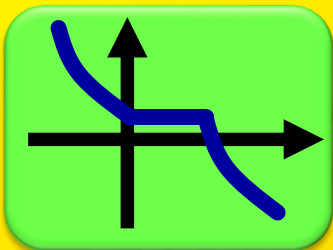
$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

صعودی

۳

با افزایش مقدار **x**، مقدار **y** افزایش می‌یابد یا ثابت می‌ماند.

$$f = \{(1, 5), (2, 4), (3, 4)\}$$



$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

نزولی

۴

با افزایش مقدار **x**، مقدار **y** کاهش می‌یابد یا ثابت می‌ماند.

به توابع نزولی یا صعودی، **یکنوا** می‌گویند!

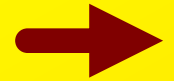
به توابعی که نه یکنوا آیند و نه یکنوای اکید، **غیریکنوا** می‌گویند!

بخش پذیری

الگوریتم تقسیم

در تقسیم $f(x)$ بر $g(x)$ داریم:

$$\begin{array}{r} f(x) \\ \hline g(x) \\ \hline q(x) \\ \hline r(x) \end{array}$$



باقیمانده خارج قسمت مقسوم علیه مقسوم

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

حداکثر $m-1$ $n-m$ m n
 درجه

ex

$$3x^3 - 2x + 1 \quad | \quad x^2 + 2$$

$$ax+b=0 \rightarrow x=\frac{-b}{a} \rightarrow r=f\left(\frac{-b}{a}\right)$$

باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $ax+b$

T اگر عبارت $f(x)=x^3+ax^2+bx-2$ بر $x-1$ بخش پذیر بوده و باقی مانده تقسیم آن

بر $2x+2$ ، برابر -12 باشد، مقدار b کدام است؟ $20(1)$ $10(2)$ $30(3)$ $40(4)$

A

آشنایی با ۳ اتحاد چقدر و بدیدن!!

۱- برای n های زوج و فرد داریم: $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1})$

ex $x^5 - 32$

ex $x^4 - 1$

۲- برای n های فرد، با تبدیل $a \rightarrow -a$ داریم: $x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1})$

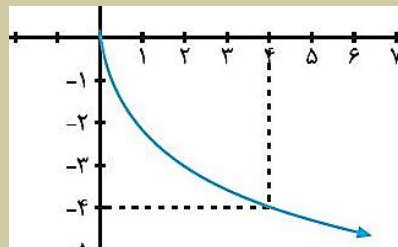
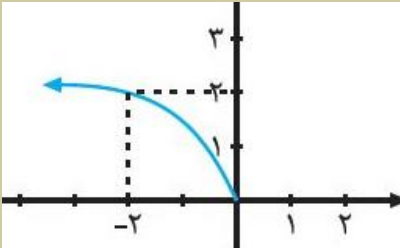
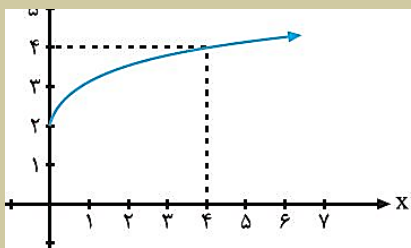
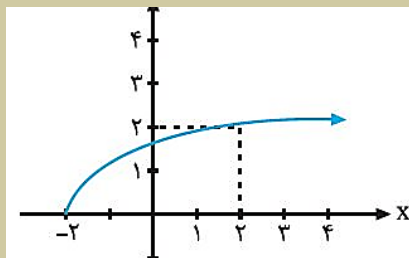
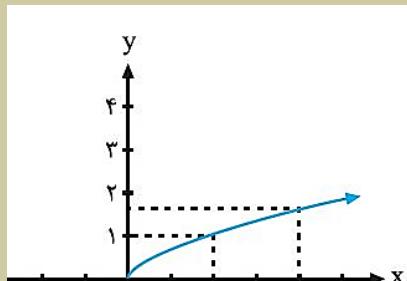
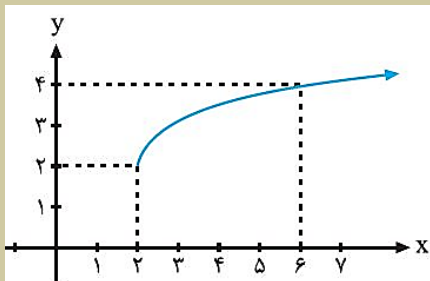
ex $x^5 + 1$

۳- برای n های زوج، با تبدیل $a \rightarrow -a$ داریم: $x^n - a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots - a^{n-1})$

ex $x^4 - 16$

حل نمونه سوال بیشتر (کتاب + امتحانات گذشته)

(تمرین کتاب) توابع زیر، تبدیل یافته‌ی تابع $y = \sqrt{x}$ هستند. هر یک از آن‌ها را به نمودارش نظیر کنید.



الف) $y = \sqrt{2+x}$

ب) $y = 2 + \sqrt{x}$

پ) $y = -2\sqrt{x}$

ت) $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$

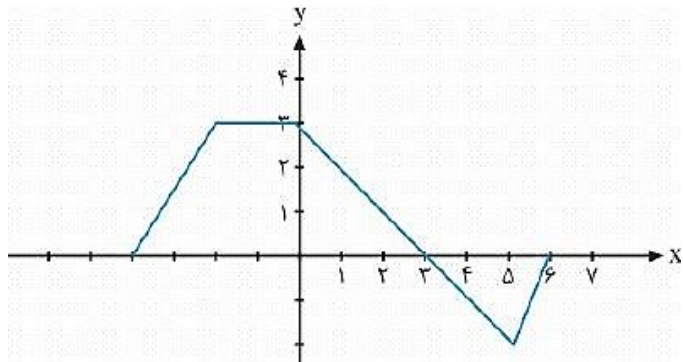
ث) $y = 2 + \sqrt{x-2}$

ج) $y = \sqrt{-2x}$

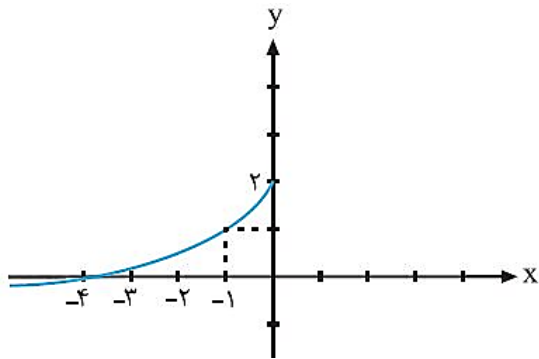
(تمرین کتاب) نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

$$y = 2f(x - 1) \quad (\text{الف})$$

$$y = f(2x - 1) \quad (\text{ب})$$



تمرین کتاب) نمودار تابع زیر فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به دست آمده است. ضابطه‌ی این تابع را بنویسید.



answer

(تمرین کتاب) تابع $f(x) = (x - 2)^3 + 1$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع f را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.

ب) نشان دهید که f وارون پذیر است و نمودار f^{-1} را رسم کنید. (پ) ضابطه f^{-1} را به دست آورید.

answer

(تمرین کتاب درسی) نمودار توابع زیر را رسم کنید. کدام یک از آنها در تمام دامنه‌ی خود اکیداً یکنواست؟

$$g(x) = 2^{-x} \quad \text{ب} \quad f(x) = \sqrt{2-x} \quad \text{الف}$$

answer

(تمرین کتاب) آیا تابعی وجود دارد که در یک فاصله، هم صعودی و هم نزولی باشد؟

answer

(تمرین کتاب) اگر باقی مانده تقسیم چند جمله ای $x^2 + kx + 2$ بر $x - 2$ برابر 6 باشد، k را تعیین کنید.

answer

(تمرین کتاب) مقدار a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ و $(x + 1)$ بخش پذیر باشد.

answer

(تمرین کتاب) هر یک از چند جمله‌ای‌های زیر را بر حسب عامل‌های فواسته شده تجزیه کنید.

(ج) $x^5 + 32$ با $x + 2$ عامل

(ب) $x^6 - 1$ با $(x + 1)$ عامل

(الف) $x^6 - 1$ با $x - 1$ عامل

answer

اگر $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2} \leq \frac{1}{64}$ عدد x را به دست آورید.

answer

ابتدا نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} (x-2)^3 & x \geq 1 \\ -2 & 0 \leq x < 1 \\ |x+1| & x < 0 \end{cases}$ را رسم کنید، سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی

و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است. **نهایی ۱۴۰۲**

answer

اگر باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $P(x) = 3x^2 + mx + 2m + 1$ بر $x - 2$ برابر ۳ باشد، باقی مانده تقسیم

چند جمله‌ای $f(x) = mx^2 - mx + 3$ بر $x + 2$ را تعیین کنید. **نهایی ۱۴۰۲**

answer

رياضيت پامن