



نہائی فول

ریاضی ۲

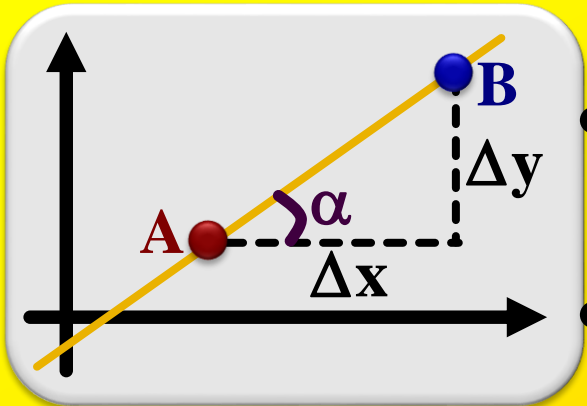
[پازدھم تجربی]



فصل ۱ : هندسه تحلیلی و جبر

شیب خط

نسبت اختلاف ارتفاع به فاصله‌ی طولی در هر دو نقطه دلخواه از خط می‌شود شیب خط!



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- $m > 0 \rightarrow$ صعودی
- $m = 0 \rightarrow$ ثابت
- $m < 0 \rightarrow$ نزولی

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha$$

زاویه‌ای که خط با جهت + محور ایکس‌ها می‌سازد

ضریب ایکس = شیب

$$y = mx + d$$

شیب در معادله‌ی صریح

$$\text{شیب} = - \frac{\text{ضریب ایکس}}{\text{ضریب وای}}$$

$$ax + by + c = 0$$

شیب در معادله‌ی ضمنی

نوشتن معادله خط

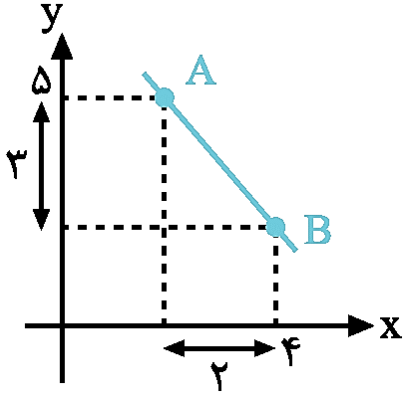
کافی است شیب خط و یک نقطه از آن را داشته باشیم!

$$A \left| \begin{array}{l} x_0 \\ y_0 \end{array} \right. \rightarrow (y - y_0) = m(x - x_0)$$

در این سوالات ابتدا شیب را مناسبه کنید. بعد با شیب و یکی از نقاط (دلتواه) معادله خط را بنویسید.

در مثلث ABC، با مختصات رئوس $A(2, -3)$, $B(-2, 5)$, $C(-4, 1)$ ، معادله میانه وارد بر ضلع AC کدام است؟

مثال: مجموع طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط گذرنده از دو نقطه A و B را در شکل مقابل به دست آورید.



answer

رسم خط

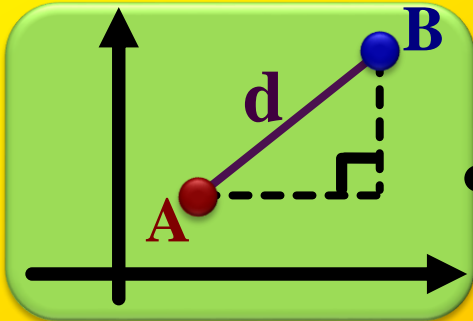
برای رسم خط به دو نقطه از آن نیاز داریم. بهترین راه این است که عرض از مبدا (x)

را صفر می‌دهیم) و طول از مبدا (y) را صفر می‌دهیم، را بدست می‌آوریم این دو نقطه را بهم وصل کنیم.

شرط موازی بودن و عمود بودن دو خط

دو خط با هم موازی اند اگر شیب آن‌ها برابر باشد و بر هم عمودند اگر شیب‌های آن‌ها عکس و قرینه یکدیگر باشد. (یعنی ضرب شیب‌های آن‌ها بشود -1)

فاصله دو نقطه از هم



$$|AB| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال: (تمرین کتاب) وضعیت هر بفت از خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید:

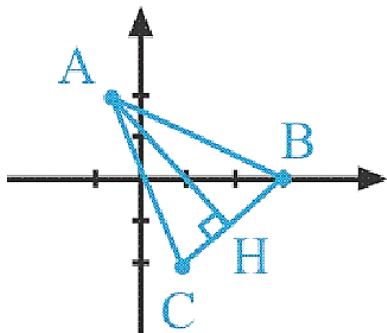
$$l: 2x - y = 1$$

$$d: y = 2x - 3$$

$$\Delta: x + 2y = 0$$

answer

مثال: نقاط $A(-1, 2)$ و $B(3, 0)$ ، $C(1, -2)$ مفتحات سه رأس مثلث ABC هستند، معادله ارتفاع AH و طول آن را به دست آورید.



answer

مختصات وسط پاره خط

در واقع وسط یعنی میانگین!



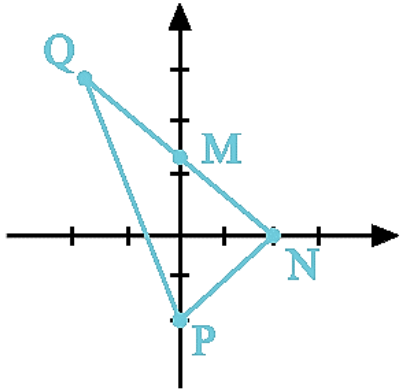
$$X_M = \frac{X_A + X_B}{2} \quad Y_M = \frac{Y_A + Y_B}{2}$$

مثال: (تمرین کتاب) $A(14, 3)$ و $B(10, -13)$ را در نظر بگیرید.

الف) فاصله مبدأ مختصات را از وسط پاره خط AB به دست آورید. ب) معادله عمود منصف پاره خط AB را بنویسید.

answer

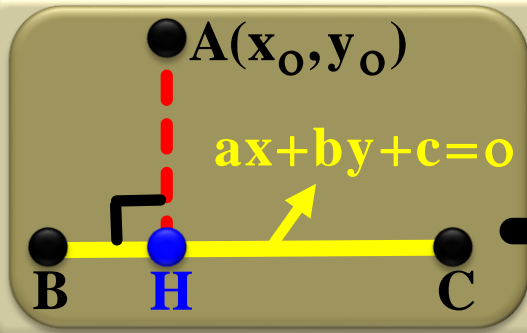
مثال: اگر نقاط $Q(-2, 3)$ ، $N(2, 0)$ ، $P(0, -2)$ رئوس مثلث PNQ باشد، میانه PM را محاسبه کنید.



answer

فاصله نقطه از خط

معادله خط عتما باید ضمنی باشد... داریم :



$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

فاصله نقطه $A(1, 2)$ از خط گذرنده بر دو نقطه $(-5, 4)$ و $(3, -2)$ کدام است؟

فاصله ۲ خط موازی

ابتدا همانند بالا معادلات را ضمنی نوشته و ضرائب ایکس و وای را یکی می‌کنیم :

$$ax+by+c'=0$$

$$ax+by+c=0$$

$$d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

فاصله بین خط های موازی $y=2x$ و $4x-2y+5=0$ کدام است؟

کاربرد معادله درجه ۲ (تغییر متغیر)

$$\text{عدد} (\text{🐶})^2 + \text{عدد} (\text{🐶}) + \text{عدد} = 0 \rightarrow \text{🐶} = t$$

در آخر جوابها را چک می‌کنیم که برامان موشکل ایبار نکنن گسگم!



$$\text{مثال} \quad x - \sqrt{x} - 6 = 0 \xrightarrow{t = \sqrt{x}} t^2 - t - 6 = 0$$

$$(t+2)(t-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = -2 \quad \text{❌} \\ \sqrt{x} = 3 \quad \text{✅} \end{cases} \rightarrow x = 9$$

مثال: معادله $(3x^2 - 1)^2 - 13(3x^2 - 1) + 22 = 0$ را حل کنید.

answer

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه ۲

$$\text{sum } S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$\text{product } P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

اگر $\Delta > 0$ باشد می‌توان جمع و ضرب دو ریشه را از روابط زیر به دست آورد:

مثال: در معادله $-2x^2 + x + 5 = 0$ بدون حل معادله، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها (P, S) را بیابید.

answer

نوشتن معادله درجه دوم با داشتن P و S

در یک معادله درجه دوم اگر S جمع ریشه‌ها و P ضرب آن‌ها باشد، معادله به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ می‌باشد!

مثال: محیط یک زمین مستطیل شکل ۱۸ متر و مساحت آن ۱۴ متر است. اندازه طول و عرض این زمین را تعیین کنید.

answer

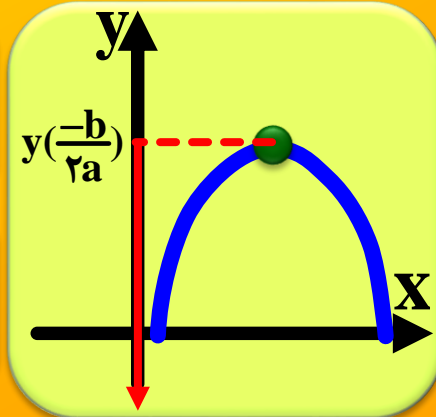
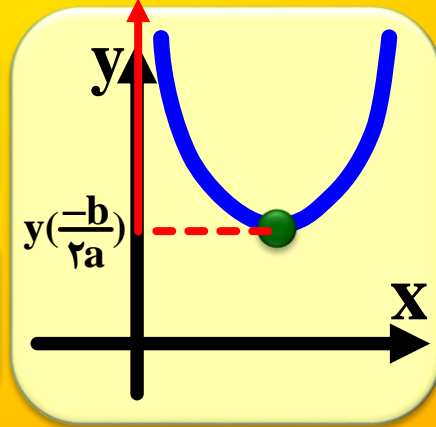
ماکزیم، مینیم و برد سهمی

if $a > 0$ → سهمی دارای **min** است → مقدار **min** = $y\left(\frac{-b}{2a}\right)$

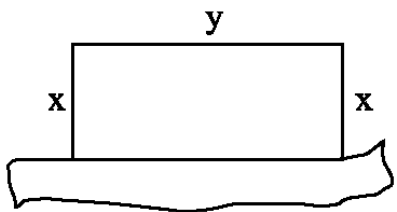
if $a > 0$ → دهانه سهمی رو به بالا است → $\mathbf{R} = [y\left(\frac{-b}{2a}\right), +\infty)$

if $a < 0$ → سهمی دارای **max** است → مقدار **max** = $y\left(\frac{-b}{2a}\right)$

if $a < 0$ → دهانه سهمی رو به پایین است → $\mathbf{R} = (-\infty, y\left(\frac{-b}{2a}\right)]$



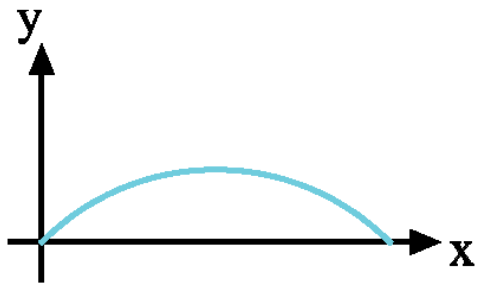
مثال: یک ماهیگیر می‌خواهد در کنار رودخانه مویزهای مستطیل شکل را فخنس‌کشی کند. او تنها هزینه ۱۰۰ متر فخنس‌کشی را در اختیار دارد. ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.



answer

نکته: صفرهای تابع درجه ۲: به طور کلی به نقاط برخورد یک تابع با محور x ها، صفرهای آن تابع می‌گویند. چرا که مقدار تابع در آن‌جا می‌شود صفره بی‌صاحب!!

مثال: (مثال کتاب) فوتبالیستی توپی را با زاویه ۴۵ درجه نسبت به سطح زمین با سرعت اولیه 20 m/s شوت می‌کند. مسیر حرکت توپ، مانند شکل مقابل است که تابع مسیر آن به صورت $y = \frac{-1}{40}x^2 + x$ می‌باشد، نقطه برخورد توپ با زمین را به دست آورید.



answer

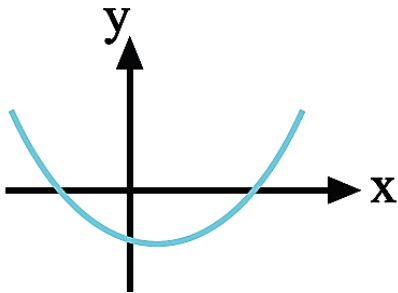
مشخص کردن علامت a و b و c از روی نمودار: $y = ax^2 + bx + c$

۱- علامت a : اگر جهت سهمی رو به بالا بود، $a > 0$ و اگر رو به پایین بود، $a < 0$ است.

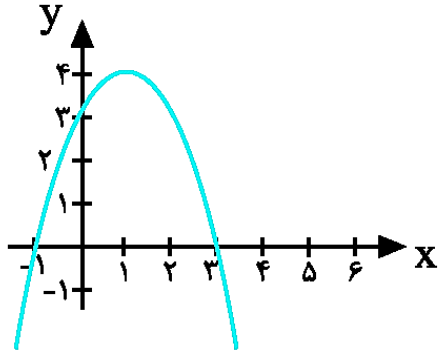
۲- علامت c : اگر $x = 0$ ، مقدار عرض از مبدأ سهمی به دست می‌آید که می‌شود $y = c$ ، پس c همان عرض از مبدأ یا محل برخورد سهمی با محور y هاست!

۳- علامت b : طول رأس سهمی می‌شود $x = \frac{-b}{2a}$ با توجه به اینکه علامت a را یافتیم و علامت طول رأس سهمی را هم از نمودار خواهیم یافت، علامت b مشخص می‌شود.

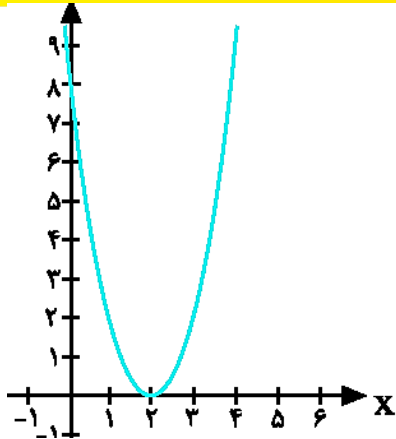
مثلاً به سهمی مقابل دقت کنید:



مثال: معادله سهمی‌های زیر را بنویسید.



answer



answer

معادله گویا

جمع و تفریق چند عبارت گویا

$$\frac{x}{10} + \frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{2x-2} \rightarrow \frac{x}{10} + \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{2(x-1)} = 0 \rightarrow \text{ک.م.م} = 10 \cdot (x-1)$$

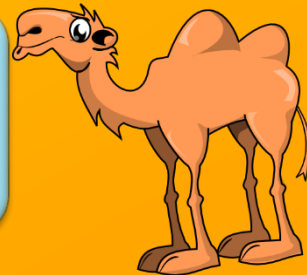
$$\rightarrow \frac{x^2 - x + 10 - 5x - 5}{10(x-1)} = 0 \rightarrow \frac{x^2 - 6x + 5}{10(x-1)} = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \quad \text{✗} \\ x=5 \quad \text{✓} \end{cases}$$

روش حل : همه‌ی عبارات یک طرف ← مخرج مشترک ← صورت برابر صفر ← فاینال چک!



جواب‌های بدست آمده را چک میکنیم تا مخرج کسری را صفر نکنند

**FINAL
CHECK**

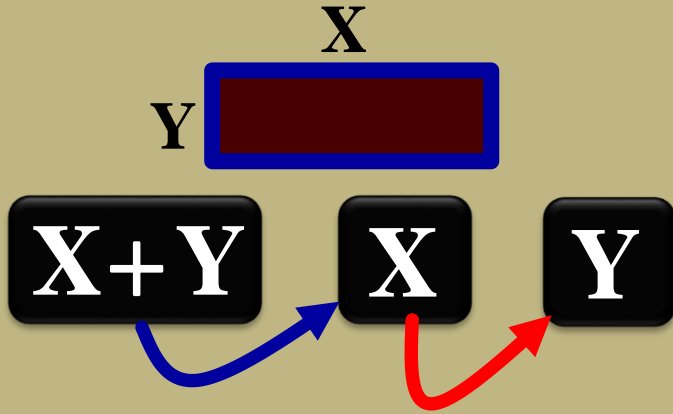


مثال: (فعالیت کتاب درسی) معادله $\frac{x}{x^2-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{x-2}{x^2-x}$ را حل کنید.

answer

مستطیل طلایی

نسبت طول به عرضش برابر $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (عدد ا ۱.۶۲) می باشد (نسبت طلایی)



$$\frac{X+Y}{Y} = \frac{X}{Y}$$

مساحت مستطیل طلایی به عرض $\sqrt{2}$ چقدر است؟

معادله گنگ

مجهولات زیر، ادیکالین

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{2x+5} = 1 \rightarrow \sqrt{x+6} = \sqrt{2x+5} + 1 \xrightarrow{\text{طرفین به توان فرجه، ادیکال}}$$

$$x+6 = 2x+5 + 2\sqrt{2x+5} + 1 \rightarrow -x = 2\sqrt{2x+5} \rightarrow x^2 = 8x + 20$$

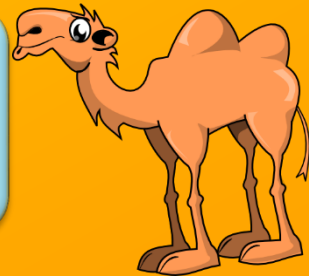
$$\rightarrow x^2 - 8x - 20 = 0 \rightarrow (x-10)(x+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=10 \text{ (X)} \\ x=-2 \text{ (✓)} \end{cases}$$



روش حل: ادیکالو تنها کن ← به توان فرجه، ادیکال برسون ← فاینال چک!

چک کن که آیا جواب‌های بدست آمده در معادله اصلی صدق می‌کنند؟

FINAL CHECK



معادله $3x = 2 + \sqrt{5x - 4}$ را حل کنید.

مثال: (کار در کلاس) بدون حل معادله، توضیح دهید که چرا معادلات زیر فاقد ریشه حقیقی هستند؟

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+3} + 1 = 0$$

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{x-2} = 0$$

$$\sqrt{t} + 2 = 0$$

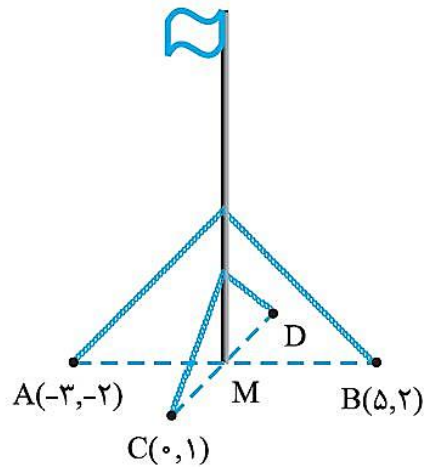
answer

answer

answer

حل نمونه سوال بیشتر (کتاب + امتحانات گذشته)

(تمرین کتاب) یک میله پرچم بزرگ، مطابق شکل توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است؛ به طوری که فاصله هر نقطه تا میله برابر است با فاصله نقطه‌ی مقابل آن تا میله. مفتصات نقطه D را به دست آورید.



(تمرین کتاب) یکی از اضلاع مربعی بر خط $L: y = 2x - 1$ واقع است. اگر $A(3, 0)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید.

answer

(تمرین کتاب) الف) نشان دهید دو خط با معادلات $5x - 12y + 8 = 0$ و $-10x + 24y + 10 = 0$ با یکدیگر موازیند. ب) فاصله این دو خط را محاسبه کنید.

answer

(تمرین کتاب) طول جغرافیایی تبریز تقریباً ۴۶ درجه شرقی و عرض جغرافیایی آن حدود ۳۸ درجه شمالی است. برای راحتی، می‌توانیم موقعیت این شهر را به طور فاصله، به صورت (۴۶,۳۸) نشان دهیم. این اطلاعات در مورد پابهار به صورت (۶۱,۲۵) است. با فرض اینکه مسافت فیزیکی هر درجه طول جغرافیایی همانند مسافت فیزیکی هر درجه عرض جغرافیایی برابر 110km باشد، مطلوب است مناسبه فاصله تقریبی این دو شهر.

answer

(تمرین کتاب) معادله $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$ را حل کنید.

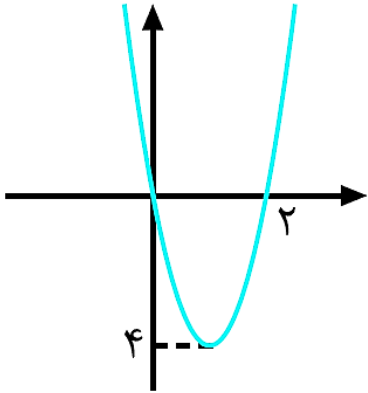
answer

(تمرین کتاب) استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم‌دایره در دو انتهای آن در حال سافت است. اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که:
الف) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد. ب) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

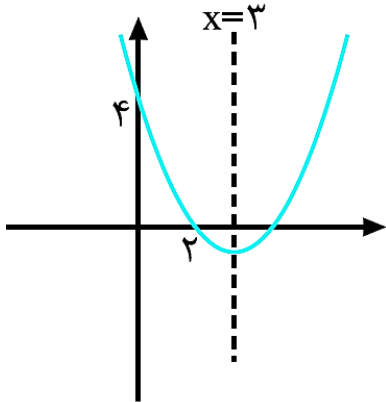


answer

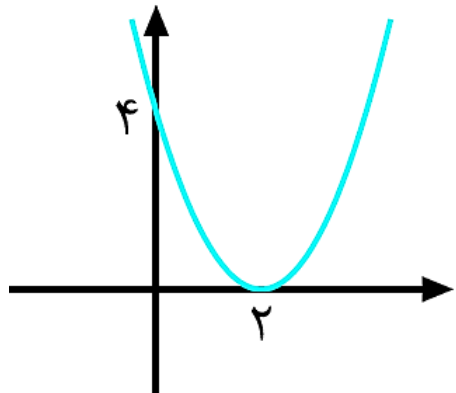
(تمرین کتاب) معادله سهمی‌های زیر را بنویسید.



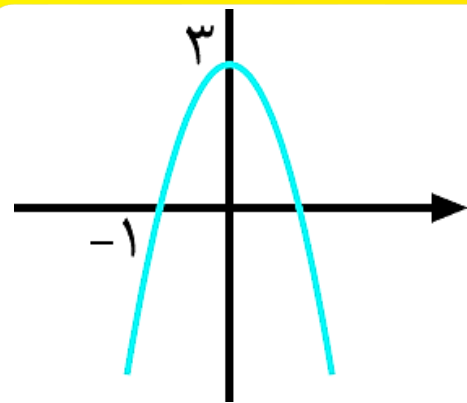
answer



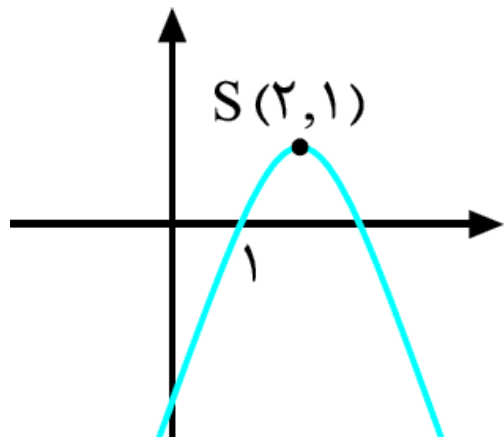
answer



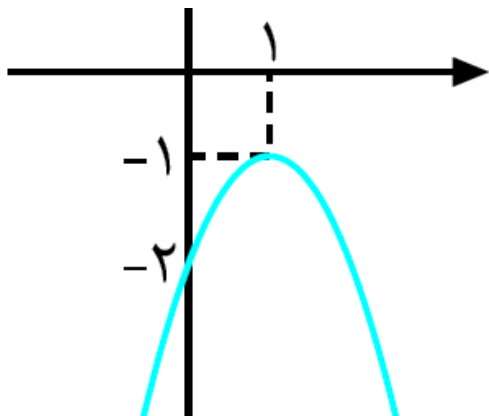
answer



answer



answer



answer

(تمرین کتاب) هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

$$\frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} = \frac{x-1}{x-3} \quad (\text{الف})$$

answer

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1 \quad (ب)$$

answer

$$\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = 2 \text{ (ج)}$$

answer

(تمرین کتاب) علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجله ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کند. پس از هروف‌چینی مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش هرود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

answer

(امتحانات سال گذشته) دو خط به معادله‌های $2x + 3y = 5$ و $ax - 2y = 3$ را در نظر بگیرید. \vec{a} را طوری بیابید که:

الف) این دو خط با هم موازی باشند. ب) این دو خط بر هم عمود باشند.

answer

(امتحانات سال گذشته) مقدار m ، اچنان بیابید که مجموع ریشه‌های معادله $2x^2 - (m+1)x - 3m = 0$ برابر با ۳ باشد.

answer

(امتحانات سال گذشته) مثلث ABC را با رأس‌های $A(1,3)$ و $B(1,1)$ و $C(5,1)$ در نظر بگیرید.

الف) مختصات نقطه M وسط پاره‌خط BC را بیابید. ب) طول میانه AM را بیابید.

answer

(امتحانات تیزهوشان ۱۴۰۲) معادله $-7x^3 = 1 - 8x^6$ را حل کنید.

answer

(امتحانات تیزهوشان ۱۴۰۲) معادله خط گذرنده از نقطه $A(2, 4)$ را بنویسید به طوری که با خط $y = 3x + 2$ موازی باشد.

answer