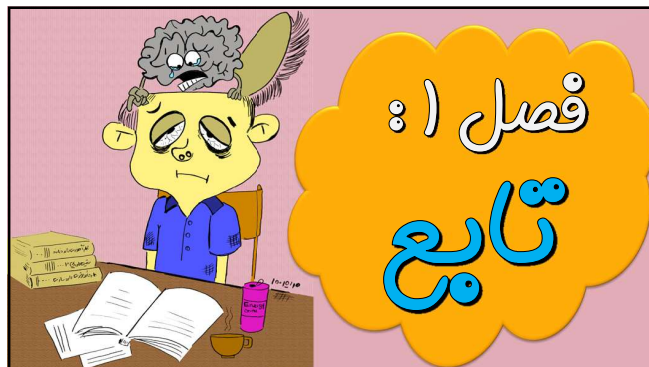




تابع چندجمله‌ای توابعی که از جمع و تفریق چند جمله به وجود می‌آیند

درجه یک چندجمله‌ای رو بزرگترین توانش مشخص میکنه

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + c$$

توانی مساوی از یکس به همش! ضربیش!

درجه $f(x) = -3x^4 + 5x^5 - 2$ $\rightarrow$ ۵

درجه $f(x) = 2x^4 - 3x - \frac{1}{x} + 2$ $\rightarrow$ ❌

توابع چندجمله‌ای خاص

۱. **تابع ثابت** ضابطه‌ی آن $y = k$ و نمودارش یک خط افقی است.

ex $f(x) = (m^2 - 6m^2 + 12m - 8)x^2 - (n^2 - mn - 3)x + \sqrt{-mn}$ تابعی ثابت است. $m+n$

۲. **تابع خطی** ضابطه‌ی آن $f(x) = mx + d$ است و نمودارش خطی است با شیب m و عرض از مبدأ d

پُر واضح است که تابع خطی یک چندجمله‌ای از نوع درجه یک می‌باشد.

T تابع f با ضابطه $f(x) = (a-2)x^2 + bx + c - 2$ بیانگر یک تابع خطی است که در نقطه‌ای به عرض ۱- محور عرض‌ها را قطع کرده است. این تابع در ربع سوم با محورهای مختصات، مثلثی با مساحت ۲۴ ایجاد کرده است. مقدار b کدام است؟ (۱) $\frac{1}{24}$ (۲) $\frac{1}{48}$ (۳) $-\frac{1}{48}$ (۴) $-\frac{1}{24}$

A

یکنوایی توابع از نظر یکنوایی یک تابع به مدل‌های زیر تبدیل می‌شود:

۱. **صعودی آکید** $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

با افزایش مقدار x ، مقدار y افزایش می‌یابد

۲. **نزولی آکید** $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

با افزایش مقدار x ، مقدار y کاهش می‌یابد

به توابع نزولی آکید یا صعودی آکید، **یکنوای آکید** (آکیدای یکنوا) می‌گویند

۳ صعودی $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
با افزایش مقدار x ، مقدار y افزایش می‌یابد یا ثابت می‌ماند.

۴ نزولی $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
با افزایش مقدار x ، مقدار y کاهش می‌یابد یا ثابت می‌ماند.

به توابع نزولی یا صعودی، یکنوا می‌گویند

به تابعی که نه یکنوا باشد و نه یکنوا باشد، غیر یکنوا می‌گویند

$f = \{(1, 2), (2, 2), (3, 8)\}$

$f = \{(1, 5), (2, 4), (3, 4)\}$

ترکیب توابع $f \circ g(x) = f(g(x))$ یعنی ایکس‌های تابع f را برادر و پدش قرار بده $g(x)$

ورودی X $\xrightarrow{g}$ $g(x)$ $\xrightarrow{f}$ $f(g(x))$

g^{-1} f^{-1}

دلمنه تابع مرکب

$f \circ g(x) = f(g(x))$; $x \in D_g$ و $g(x) \in D_f$

یادت باشه بیای O پراتر بنزرا

کته، دلمنه تابع رو همیشه از راه تعریف (که الان گفتیم) به دست بیارید نه از روی حافظه شایبه!

مثال: (مثال و کار در کلاس کتاب) در هر قسمت، موارد خواسته شده را بنویسید.

الف) $f(x) = \sqrt{x-1}$ ، $g(x) = 2x^2 - 1$ دلمنه و شایبه $f \circ g(x)$ ؟

answer

ب) $f(x) = \frac{2}{x-1}$ دلمنه و شایبه $f \circ f(x)$ ؟

answer

مثال: توابع $f = \{(1, 2), (2, 2), (3, 4)\}$ و $g = \{(2, 3), (5, 6)\}$ مفروضه. تابع $g \circ f$ را به دست آورید.

answer

انتقال ببینیم با هریک از اعمال زیر، نمودار تابع $f(x)$ چگونه انتقال می‌یابد :

۱ $f(x) + k$
نمودار $f(x)$ را k واحد و در جهت علامت k روی محور y ها حرکت بده

۲ $f(x+k)$
نمودار $f(x)$ را k واحد و در خلاف جهت علامت k روی محور x ها حرکت بده

ex $y = x^3 - 1$

ex $y = \frac{1}{x-1}$

مثال: نمودار تابع $y = -2(x-1)^2 + 1$ را به کمک انتقال رسم کنید.

answer

۳ $kf(x)$

عرض نقاط روی نمودار $f(x)$ را k برابر کن (سقف و کف k برابر شه)

ex $y = -2 \cos x$

۴ $f(kx)$

طول نقاط روی نمودار $f(x)$ را $\frac{1}{k}$ برابر کن (در واقع دامنه $\frac{1}{k}$ برابر شه)

ex $y = \sin 2x$

نکته برعکس!

۱ نمودار تابع $f(-x)$ قرینه‌ی نمودار $f(x)$ نسبت به محور y ها است.

۲ نمودار تابع $-f(x)$ قرینه‌ی نمودار $f(x)$ نسبت به محور x ها است.

مثال: (مثال کتیب با تغییر) در شکل زیر، نمودار $y = f(x)$ داده شده، به کمک آن نمودار $y = -\frac{1}{3}f(x) + 1$ را رسم کنید.

answer

مثال: نمودار تابع $g(-\frac{x}{3})$ را رسم کنید.

answer

روش سرهنگیزه‌ی رسم $f(ax+b)$

ایکس رو تنها کن و هر کاری داری میکنی تا ایکس تنها شه، دقیقاً همون کارو برای ایکسای نمودار هم انجام بدها دقیقاً همون بلا! نه برعکسش و اینا

ex نمودار $f(x)$

نمودار $f(-2x + 0/5)$ را به دست آورید (پلیز!)

ایکس رو تنها کن (اول منهای نیم)

مثال) اگر نمودار تابع g به صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x) = f(2x+1)$ را به کمک آن رسم کنید.

answer

تابع معکوس هر تابع مانند f یک وارون (f^{-1}) دارد. حالا اگر f^{-1} خود یک تابع باشد می‌گوییم f معکوس‌پذیر است. (آهه کاهی f^{-1} یک تابع نیست!)

توجه شرط لازم و کافی معکوس‌پذیری تابع f این است که f یک‌به‌یک باشد

محاسبه وارون در زوج مرتبه‌ها

$f = \{(1, 2), (2, 3), (5, 3)\} \rightarrow f^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (3, 5)\}$ ❌

$g = \{(1, 4), (2, 3), (5, 6), (0, 1)\} \rightarrow g^{-1} = \{(4, 1), (3, 2), (6, 5), (1, 0)\}$

توجه $D_f = R_{f^{-1}}$ & $R_f = D_{f^{-1}}$

محاسبه وارون در فرم پیکانی کافیه جهت فلش‌ها رو عوض کنی

آیا در مثال بالا تابع f وارون‌پذیر است؟ چرا؟

پدست آوردن نمودار وارون کافی است قرینه‌ی نمودار f نسبت به نیمساز تأخیه اول و سوم را به‌دست بیاورید! نمودار f^{-1} آماده‌ست! (نوش جان!)

توجه اگر نقطه (a, b) روی f باشد، نقطه (b, a) روی معکوسش است و بالعکس!

توجه ترکیب یک تابع با وارونش همانی است.

$f^{-1} \circ f(x) = x, x \in D_f = R_{f^{-1}}$ $f \circ f^{-1}(x) = x, x \in D_{f^{-1}} = R_f$

T هرگاه $f(x) = 3 - \sqrt{x-2}$ باشد، دامنه تابع $f \circ f^{-1}$ کدام است؟

$(-\infty, 3]$ (✓) $[2, +\infty)$ $(-\infty, 2]$ $(3, +\infty)(4)$

A

مثال) اگر $f = \{(1, 4), (2, 3), (3, 5)\}$ ، $f^{-1} \circ f$ و $f \circ f^{-1}$ را بنویسید.

answer

با استفاده از کلمه زیر می‌توان پی برد که آیا دو تابع f و g معکوس هم هستند یا خیر. به این صورت که:

اگر $\text{fog}(x) = x$ & $\text{gof}(x) = x$ آنگاه f و g معکوس یکدیگرند.

مثال: مثال کتاب نشان دهید توابع $f(x) = 3x - 4$ و $g(x) = \frac{x+4}{3}$ وارون یکدیگرند.

answer

ex if $f(x) = 2x - 3$ **then** $f^{-1}(x) = ?$

پدست آوردن ضابطه f^{-1}

کام اول بهای $f(x)$ بنویسید و سعی کنید x رو بر حسب y بدست بیارید (x رو تعویض کنید)

کام دوم بهای y بنویسید و بهای x بنویسید $f^{-1}(x)$ اتمام!

ex if $f(x) = \frac{x}{\sqrt{8+9x}}$ **then** $f^{-1}(x) = ?$

مثال: اگر در کلاس ضابطه وارون توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. دامنه و پیر هر تابع و وارون آن را با استفاده از نمودار مشخص کنید.

الف) $h(x) = x^2 + 1$

ب) $f(x) = 1 + \sqrt{x - 2}$

محدود کردن دامنه f (تعیین کردن f)

گاهی در دامنه تعریفش غیر یک به یک و در نتیجه وارون‌ناپذیر است. در این صورت دامنه آن را طوری محدود می‌کنیم (دلفواه) که f در دامنه چریش وارون‌پذیر شود. به این عمل تعریف کردن f می‌گویند.

مثلاً با توجه به اینکه $y = x^2$ یک سهمی است، وارون‌ناپذیر است. اگر پروید سراغ مناسبه

$f^{-1} = \pm\sqrt{x}$ به $f^{-1} = \pm\sqrt{x}$ می‌رسید که تابع نیست. $\Rightarrow$

با محدود کردن دامنه f به طور دلفواه، مثلاً $x \leq 0$ یک به یک و معکوس‌پذیر می‌شود $\Rightarrow$

و نمودار معکوس f هم می‌شود

دقت شود که

حل نمونه سوال بیشتر (کتاب + امتحانات گذشته)

(تمرین کتاب) نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و پیر آن را مشخص نمایید.

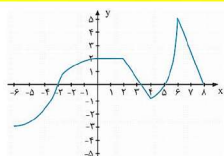
$y = (x - 1)^2 - 1$

(تمرین کتاب) نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & x < -4 \\ 3 & -4 \leq x < 2 \\ 2x - 2 & x \geq 2 \end{cases}$

answer

(تمرین کتاب) با استفاده از نمودار تابع زیر مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی، نزولی یا ثابت است؟



answer

(تمرین کتاب) تابع $y = 2^x - 2$ و تابع کلاریتی $y = -\log_2 x + 2$ را رسم کنید و در مورد یکنواختی آن‌ها توضیح دهید.

answer

(تمرین کتاب) تابع $y = x^y |x|$ در بازه $(-\infty, a]$ نزولی است، حداکثر مقدار a چقدر است؟

answer

(تمرین کتاب) در هر قسمت، موارد خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

الف) $f(x) = \sqrt{3-2x}$; $g(x) = \frac{p}{3x-5}$: $D_{f \circ g}, (f \circ g)(x)$

answer

ب) $f(x) = \sqrt{x+2}$; $g(x) = \sqrt{x^2-16}$: $D_{g \circ f}, (g \circ f)(x)$

answer

ب) $f(x) = \sin x$; $g(x) = \sqrt{x}$: $D_{g \circ f}, (g \circ f)(x)$

answer

(تمرین کتاب) اگر $f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14$ و $f(x) = 3x - 4$ ، مشابه تابع $g(x)$ را به دست آورید.

answer

(تمرین کتاب) مشخص کنید کدام یک از عملیات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ، آنگاه $(f \circ g)(5) = -25$

answer

ب) برای دو تابع f و g که $f \neq g$ تساوی $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست.

answer

ب) اگر $f(7) = 5$ و $g(4) = 7$ ، آنگاه $(f \circ g)(4) = 5$

answer

ت) اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 3x - 1$ ، آنگاه $(f \circ g)(5) = g(2)$.

answer

(تمرین کتاب) تابع زیر را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصر به فرد است؟ $h(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

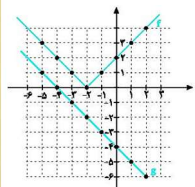
answer

(تمرین کتاب) با توجه به نمودارهای توابع g و f ، مقادیر زیر را در صورت وجود بنویسید.

الف) $(fog)(-1)$

answer

ب) $(gof)(0)$



(تمرین کتاب) با توجه به ضابطه‌ی توابع g و f ، معادله مورد نظر را تشکیل داده و آن را حل کنید.

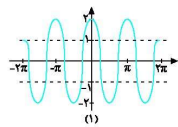
$$f(x) = 2x - 5, \quad g(x) = x^2 - 3x + 8 : (fog)(x) = 7$$

answer

(تمرین کتاب) با استفاده از نمودار $y = \cos x$ ، نمودار توابع زیر رسم شده است. ضابطه‌های هر نمودار را مشخص کنید.

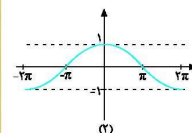
الف)

answer



ب)

answer



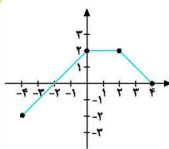
(تمرین کتاب) نمودار تابع $y = -\sin 2x - 1$ را به کمک نمودار تابع $y = \sin x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.

answer

(تمرین کتاب) با استفاده از نمودار تابع f ، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.

الف) $y = -f(-x) + 2$

answer



ب) $y = 2f(x-1) - 3$

answer

(تمرین کتاب) نشان دهید زیر یک به یک است، سپس ضابطه‌ی تابع وارون آن را به دست آورید.

$g(x) = -5 - \sqrt{3x+1}$

answer

(تمرین کتاب) نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند. $f(x) = -\sqrt{x-8}$, $g(x) = 8 + x^2; x \leq 0$

answer

(تمرین کتاب) توابع زیر یک به یک نیستند، با محدود کردن دامنه آن‌ها توابعی یک به یک بسازید.

الف) $f(x) = |x|$

ب) $g(x) = -x^2$

(تمرین کتاب) اگر $f(x) = \frac{1}{x} - 3$ و $g(x) = x^2$ ، مقادیر زیر را به دست آورید.

الف) $(f \circ g)^{-1}(5)$

answer

ب) $(f^{-1} \circ f^{-1})(6)$

$g(x) = x^2$, $f(x) = \frac{1}{x} - 3$

answer

$(g^{-1} \circ f^{-1})(5)$ $g(x) = x^3$ $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$

answer

ضابطه و دامنه تابع وارون تابع زیر را به دست آورید. **نهایی ۱۳۰۲**

$f(x) = -x^2 - 2 \mid x \geq 0$

answer

اگر دامنه تابع $f(x) = y$ برابر $[-1, 2]$ و برد آن $[\frac{1}{4}, 1]$ باشد. دامنه و برد تابع $f(\frac{x}{4}) = y$ را بیابید. **نهایی ۱۳۰۲**

answer





دوره تناوب توابع مثلثاتی

مفهوم دوره تناوب به تابعی که نمودارش به ازای یک طول مشخص تکرار شوده متناوب میگویم. به کوچکترین طولی که نمودار تابع در آن تکرار می‌شود، دوره تناوب آن می‌گویم و با T نشانش می‌دهیم.

$T \in \mathbb{Q}$

$T=1$

$T=2$

دوره تناوب توابع مثلثاتی

$k \sin(ax+b)+c$
 $k \cos(ax+b)+c$

$T = \frac{2\pi}{|a|}$

$k \tan(ax+b)+c$
 $k \cot(ax+b)+c$

$T = \frac{\pi}{|a|}$

T دوره تناوب تابع با ضابطه $f(x) = 3 \sin(\frac{x}{3}) - 1$ با دوره تناوب کدام تابع زیر برابر است؟

$\checkmark f(x) = 3 \tan(\frac{x+1}{3})(2)$

$f(x) = 4 \cos(2x+1) - 4(1)$

$f(x) = 2 \tan(\frac{x}{4}) - 2(4)$

$f(x) = \sin(\frac{1-2x}{4})(2)$

توابع مثلثاتی ۱

$y = \sin x$

$y = \sin x$
 $x \in [0, 2\pi]$

$D_{\sin x} = \mathbb{R}$

$R_{\sin x} = [-1, 1]$

EX) $y = 2 \sin(\pi x) - 1$

$y = k \sin(ax+b)+c$

$\max = |k|+c$

$\min = -|k|+c$

توابع مثلثاتی ۲

$y = \cos x$

$y = \cos x$
 $x \in [0, 2\pi]$

$D_{\cos x} = \mathbb{R}$

$R_{\cos x} = [-1, 1]$

EX) $y = -3 \cos(-\frac{x}{3}) + 1$

$y = k \cos(ax+b)+c$

$\max = |k|+c$

$\min = -|k|+c$

توابع مثلثاتی ۳

$y = \tan x$

$R_{\tan x} = \mathbb{R}$

$D_{\tan x} : x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

EX) $y = \left| \tan(\frac{\pi}{4}x) \right|$

مثال (مثال کتاب درسی) دوره تناوب و مقادیر $\min$ و $\max$ هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = 3 \sin(2x) - 2$

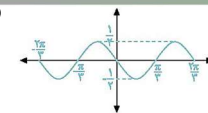
answer

ب) $y = -\frac{1}{4} \cos(\pi x)$

answer

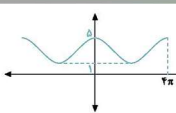
مثال (مثال کتاب) هر یک از نمودارهای زیر مربوط به $y = a \sin bx + C$ یا $y = a \cos bx + C$ است. با تشخیص $\min$ و $\max$ و دوره تناوب، ضابطه هر کدام را مشخص کنید.

الف)



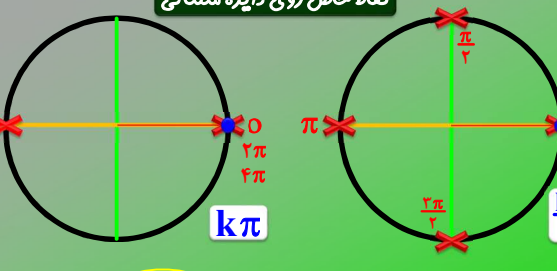
answer

ب)



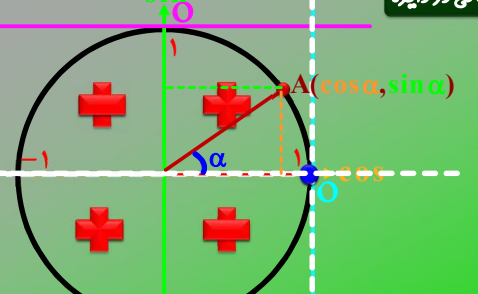
answer

نقاط خاص روی دایره مثلثاتی



$D_{\tan x} : x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow \frac{(2k+1)\pi}{2}$ $D_{\cot x} : x \neq k\pi \rightsquigarrow \frac{(2k)\pi}{2}$

نسبت‌های مثلثاتی در دایره



نسبت‌های مثلثاتی زاویای دو برابر همان

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha \begin{cases} \longrightarrow = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \longrightarrow = 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \longrightarrow = 1 - 2 \sin^2 \alpha \end{cases}$$

مثال: (مثال کتاب) مقدار $\sin 15^\circ$ و $\cos 15^\circ$ را بیابید.

answer

معادلات مثلثاتی

معادلاتی که در آنها مجهول در همان نسبت مثلثاتی قرار دارد ۳ مدل کلی دارند :

1 $\sin x = a = \sin \alpha \longrightarrow x = 2k\pi + \alpha$ or $x = 2k\pi + \pi - \alpha$

مثال: اگر در کلاس کتاب) معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$

answer

نکته: اگر $\sin$ مساوی یک عدد منفی شد کاری به منفی نداشته باشید. زاویه α را به درست یا بزرگتر منفی را بزرگتر داخل

ب) $2 \sin x + \sqrt{3} = 0 \longrightarrow x = ?$

answer

2 $\cos x = a = \cos \alpha \longrightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$

$2 \cos 2x - \sqrt{3} = 0 \longrightarrow x = ?$

مثال: (مثال کتاب) معادله $\cos x(2\cos x - 1) = 5$ را حل کنید.

answer

گفته، اگر $\cos$ مساوی یک عدد منفی شده، کاری به منفی نداشته باشید و زاویه α را بیابید.
در نهایت چای $\cos$ بنویسید. $\pi - \alpha$

$$\cos(x) = -\frac{1}{2}$$

(تمرین کتاب) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

$$y = -\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 2$$

answer

$$y = -\frac{3}{4} \cos 3x$$

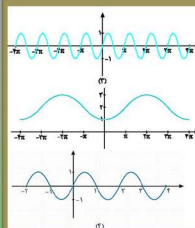
answer

(تمرین کتاب) هر یک از توابع داده شده را به نمودارهای زیر تغییر کنید.

$$y = \sin \pi x$$

$$y = 2 - \cos \frac{1}{2} x$$

$$y = \sin 3x$$



answer

(تمرین کتاب) در هر مورد ضابطه تایی مثالی با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

$$T = \pi, \quad \max = 3, \quad \min = -3$$

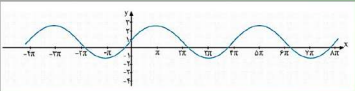
answer

$$T = 2, \quad \max = 1, \quad \min = -1$$

answer

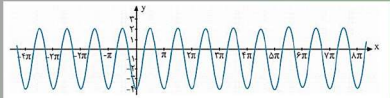
(تمرین کتاب) شبیه مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.

الف)



answer

ب)



answer

(تمرین کتاب) کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است.

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن غیرصعودی باشد.

ت) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

answer

(تمرین کتاب) با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید

الف) $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$

answer

ب) $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \frac{5\pi}{4}$

answer

(تمرین کتاب) فرض کنید $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\sin 2\alpha$ ب) $\cos 2\alpha$

answer

(تمرین کتاب) نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $5^\circ / 22^\circ$ به دست آورید.

answer

(تمرین کتاب) معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin \frac{\pi}{3} = \sin 3x$

answer

ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

answer

ب) $\cos x = \cos 2x$

answer

د) $\cos 2x + \sin x = 0$

answer

د) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$

answer

مخصوص رشته ریاضی

$\tan x = a = \tan \alpha \rightarrow x = k\pi + \alpha$

مثال: $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3} \rightarrow x = ?$

Why?

۲۹۳

مثال: معادله $\tan x = \tan \Delta x$ را حل کنید.

answer

مثال: (مثال کتاب) نشان دهید در شکل رویه‌رو، رابطه بین زاویه دید دوربین (β) با فاصله افقی آن تا تابلو نقاشی، به صورت $\tan \beta = \frac{y}{x^2 + 1/d}$ است. سپس زاویه دید را در حالتی که فاصله افقی برابر یک متر است به دست آورید.

answer

گفته: اگر $\tan$ مساوی یک عدد منفی شد کاری به منفی نداشته باشید. زاویه α را به دست بیاورید بعد منفی را بپذیرید داخل

مثال: معادله $\tan^2 x + 2\sqrt{3} \tan x + 3 = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ دارای چند جواب است؟

answer

(تمرین کتاب) معادله زیر را حل کنید.

$\tan(2x - 1) = 0$

answer

(تمرین کتاب) معادله زیر را حل کنید.

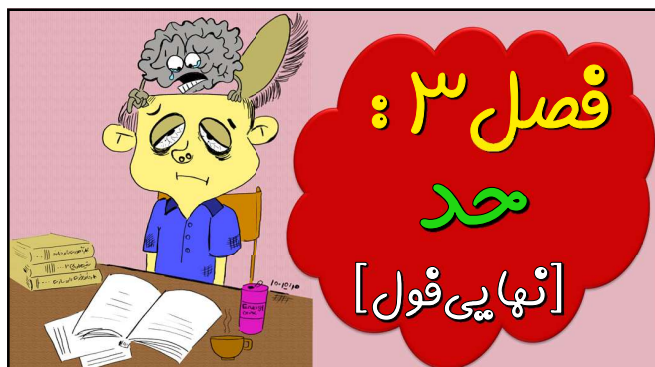
$\tan 2x = \tan(\pi x)$

answer



(تمرین کتاب) مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مقروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آن‌گاه قطر مثلث با این خاصیت‌ها می‌تواند ساخت؟

answer



بخش پذیری ← **الگوریتم تقسیم** در تقسیم $f(x)$ بر $g(x)$ داریم:

باقیمانده خارج قسمت **مقسوم علیه** **مقسوم**

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{q(x)}{r(x)} \rightarrow f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

ex $3x^3 - 2x + 1 \mid x^2 + 2$

باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $ax+b$ $ax+b=0 \rightarrow x = \frac{-b}{a} \rightarrow r = f(\frac{-b}{a})$

مثال: اگر در کلاس کتاب نشان دهید $10 - 3x - 5x^2 + 2x^3 = f(x)$ بر دو جمله ای $x+2$ بخش پذیر است.

answer

T اگر عبارت $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$ بر $x-1$ بخش پذیر بوده و باقی مانده تقسیم آن بر $x+2$ ، برابر -12 باشد، مقدار b کددام است؟ $20(1) \quad 10(2) \quad -20(3) \quad -10(4)$

A

رفع ابهام $\frac{0}{0}$ در توابع کسری

ممکن است از این قسمت دو مدل سؤال ببینید:

مدل اول: اگر در صورت، مخرج یا هر دو، یک تابع چندجمله ای داریم که وقتی $x \rightarrow a$ ، مقدارش صفر می شود، یعنی آن چندجمله ای بر $x-a$ بخش پذیر است. با تقسیم این چندجمله ای بر $x-a$ ، آن را تجزیه کنیم و تمام!

مدل دوم: اگر کسر داده شده شامل عبارتی رادیکالی بود که در نقطه حرجی داده شده مقدارش صفر می شد، با ضرب صورت و مخرج کسر در مزدوج عبارت رادیکالی و حذف عامل صفرساز از صورت و مخرج، گره از گره مان باز می شود

انتخاب... و دیگر ریشت نفس $\frac{0}{0}$ را نترسیم دیر!

مثال: (مثال کتاب) هر تابع $f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 + 4}{x^2 + 8}$ را در نقطه $x = -2$ در صورت وجود بیابید.

answer

مثال: (مثال کتاب) هر تابع $g(x) = \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5}$ را در نقطه $x = 5$ در صورت وجود بیابید.

answer

کتاب: گاهی فرجه را در کتاب ۳ است. در این صورت باید از انتگرال پانچ و لاغر استفاده کنید. اگر قسمت لاغر (یا پانچ) انتگرال داده شده بود، صورت و مخرج را در قسمت پانچ (یا لاغر) انتگرال ضرب کنید.

مثال: (مثال کتاب) هر تابع $h(x) = \frac{x^2 - 8x}{\sqrt{x} - 2}$ را در $x = 8$ در صورت وجود بیابید.

answer

مفهوم ریاضی و نموداری حد ← **همسایگی عدد α**

بازه‌ای باز شامل عدد α را یک همسایگی برای α می‌گوییم!

این بازه به همسایگی α است!

if $\alpha \in (x_1, x_2) \rightarrow$

همسایگی راست عدد α

بازه‌ای باز شامل اعداد بزرگتر از α .

اگر بازه‌ی (a, b) به همسایگی راست برای α باشد آنگاه $\alpha = a$ & $b > \alpha$

همسایگی چپ عدد α

بازه‌ای باز شامل اعداد کوچکتر از α .

اگر بازه‌ی (a, b) به همسایگی چپ برای α باشد آنگاه $\alpha = b$ & $a < \alpha$

همسایگی محذوف عدد α

مجموعه‌ای شامل اعداد کوچکتر یا بزرگتر از α که خود α از آن حذف شده باشد.

اگر بازه‌ی $(a, b) \cup (c, d)$ به همسایگی محذوف برای α باشد آنگاه $\alpha = b = c$ & $a < \alpha < d$

حد نامتناهی (حد بی‌نهایت)

گاهی وقتی آیکس به یک عدد میل می‌کند (از یک یا دو طرف)، حاصل هر به بی‌نهایت میل می‌کند! بیابید!

انفصال سبک

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

انفصال مشافف

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

هرکدام از عروق بالا در a ، به هر نامتناهی!

خط قائم $x = a$ در هرکدام از نمودارهای بالا یک میانه قائم برای تابع f می‌باشد!

مثال: (مثال کتاب) نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x-2}$ را رسم کنید و به وسیله آن، هر چپ و راست این تابع $x = 2$ را بیابید.

answer

مثال: اگر در کلاس) هر دو زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x}{-x-5}$

د) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x-2}{x^2-3x+2}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x-3|}$

حد در بی نهایت

گاهی وقتی ایکس به $+\infty$ یا $-\infty$ میل میکند، در مساوی یک عدد می شود که همان حد در بی نهایت است!

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$

خط افقی $y = L$ در هر کدام از نمودارهای بالا یک میانجی افقی برای تابع f می باشد!

هشدار! شرط لازم برای اینکه بتوانیم حد در بی نهایت تابعی را محاسبه کنیم این است که دامنه اش حداقل از یک طرف بی کران باشد!

ex $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4-x^2}$

هم ارزی پرتوان! وقتی ایکس (پایه) به بی نهایت میل می کند، یک عبارت که متشکل از جمع و تفریق چند جمله است) هم ارز جمله ای با بیشترین توان است!

if $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow 4x^2 - 5x - 7x^2 + 4 - 7x^3$ if $x \rightarrow 0 \Rightarrow -2(\frac{1}{x})^2 + 4(\frac{1}{x}) - 2(\frac{1}{x})^2$

if $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow |x^2+x| \sim x^2, \sqrt[3]{4x^3-2x} \sim \sqrt[3]{4x^3}, 3^{x^2+x} \sim 3^{x^2}, \sqrt{x^2+x} \sim \sqrt{x^2}$

T حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2+x^2+1}{x^2+x-1}$ چقدر از $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12x+5}{4x-3}$ کمتر است؟

۱(۱) -۵(۲) -۱(۳) ۵(۴)

A

مثال: اگر در کلاس) هر دو زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3+7x^2-2x-9}{3x^2-8x+1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x+4}{x^3+x-8}$

ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^2+5x^2}{2x^3+9}$

الف)

ب)

ج)

(تمرین کتاب) نشان دهید چند جمله ای $f(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ بر دو جمله ای $x+1$ بخش پذیر است. سپس به کمک تقسیم، $f(x)$ را به صورت حاصل ضرب عامل ها بنویسید.

answer

(تمرین کتاب) خروج زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 + 3x - 4}{x^3 + 4x^2 + x + 4}$$

الف)

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 4x^2 - 4x - 5}{x^2 - 25}$$

ب)

(تمرین کتاب) خروج زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt[3]{x} + 16}{\sqrt{x} + 2}$$

الف)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2x-1}}{x^2 - x}$$

ب)

(تمرین کتاب) گره‌های زیر را تعیین کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$$

الف)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{|x|}$$

ب)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$$

ب)

$$\lim_{x \rightarrow -6} \frac{9}{(x+6)^2}$$

ت)

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1-5x}{x^2-9}$$

ث)

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-3x}{x^2-4}$$

ج)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x}$$

ج)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x$$

ح)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x$$

خ)

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x]-3}{x-3}$$

و)

(تمرین کتاب) نمودار هر یک از تابع‌های زیر را رسم کنید و سپس خروج خواسته شده را به دست آورید.

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} : \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} : \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

(تمرین کتاب) با توجه به نمودار توابع، خروج خواسته شده را بنویسید.

(ب)

(ب)

(الف)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$

$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} h(x)$

(تمرین کتاب) نمودار تابع گانه شکل زیر است. خروج خواسته شده را بنویسید.

$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(الف)

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(ب)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

(ث)

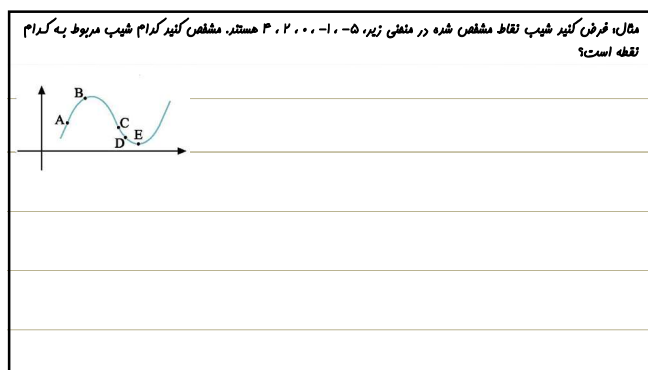
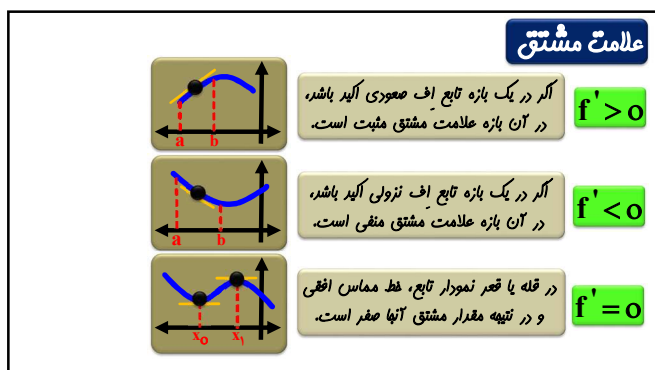
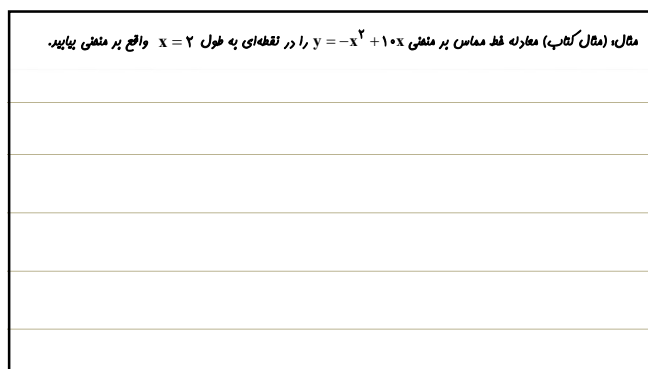
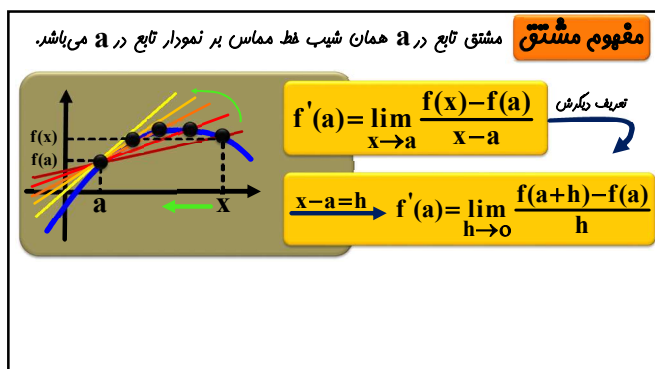
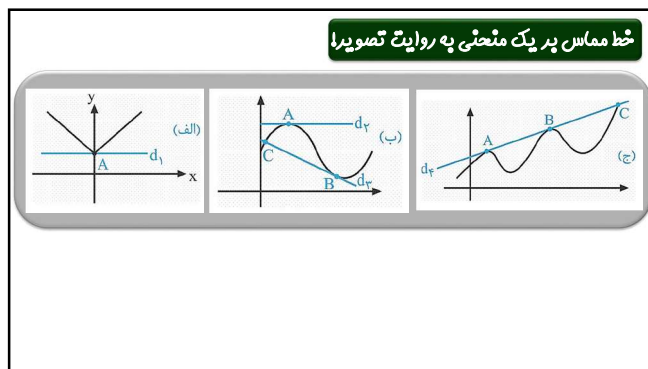
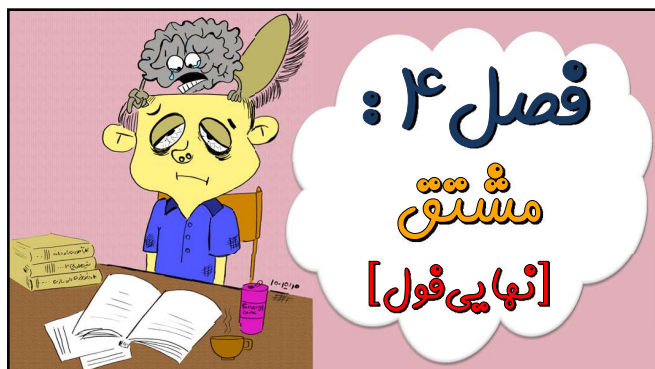
(تمرین کتاب) خروج زیر را معادله کنید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x} - 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3 - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 - 8x^3 - x}{x^3 - 5x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x + 1}{x^3 + 3x - 3}$$



شیب نیم‌مماس چپ

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شیب نیم‌مماس راست

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شرط مشتق پذیری f در x=a زمانی یک تابع در یک نقطه مشتق پذیر است که بتوان در آن نقطه بر نمودارش یک خط مماس غیر قائم رسم کرد (مماس ی تیکه)

پس شروط مشتق پذیری اف در آ می شود :

- باید تابع در این نقطه پیوسته باشد.
- باید مشتق چپ و راست برابر باشند.

توجه شرط لازم برای وجود مشتق راست/چپ (شیب نیم‌مماس راست/چپ) این است که تابع در آن نقطه از راست/چپ پیوسته باشد.

کلا مواست باشه از نقطه توفالی نه میشه مماس رسم کرد، نه نیم‌مماس!

توجه یکی از مهم ترین کانیدراهای مشتق تاپزیری، نقاط مرزی در توابع پندرضابطه ای هستند.

مثال: (مثال کتاب) مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در $x = 1$ بررسی کنید.

مثال: (مثال کتاب) مشتق پذیری توابع $f(x) = [x]$ و $g(x) = \sqrt{x}$ را در صفر بررسی کنید.

مماس قائم

اگر f در $x = a$ پیوسته باشد و $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ هر دو $+\infty$ یا هر دو $-\infty$ شوند، f در a مشتق پذیر نیست، اما خط مماس در این نقطه موجود است، که به آن مماس قائم می‌گویند.

$f'_-(a) = f'_+(a) = +\infty$ (مثبت شد چون صعودی است)

$f'_-(a) = f'_+(a) = -\infty$ (منفی شد چون نزولی است)

مثال: آیا تابع $y = \sqrt[3]{x}$ در $x=0$ دارای خط مماس است؟

مثال: آیا تابع $y = \sqrt[3]{x}$ در $x=0$ دارای خط مماس است؟

تابع مشتق ($f'(x)$)

برابر است با $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ مشروط بر آن که این هر موجود باشد. مجموعه تمام نقاطی از دامنه f که f' برای آن‌ها موجود باشد را $D_{f'}$ می‌گوییم.

مثال (مثال کتاب) اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ ، تابع مشتق و دامنه آن را به دست آورید. سپس $f'(2)$ را بنویسید.

مشتق گیری! (صفر تا صد) پنر فرمول مشتق گیری مشتق ببینیم صفا کنیم!

۱ $y=a (a \in \mathbb{R}) \rightarrow y'=0$ ۲ $y=ax \rightarrow y'=a$

۳ $y=a\Delta^n \rightarrow y'=an(\Delta)^{n-1} \cdot \Delta'$ رهنر
 • نما در ضریب ضرب میشه!
 • یکی از نما کم میشه!
 • در مشتق پایه ضرب میشه!

ex $y=\frac{-2}{x^2} \rightarrow y'=\frac{4}{x^3}$ ex $y=\frac{1}{\Delta}(-\Delta x)^{12} \rightarrow y'=-12(-\Delta x)^{11} \cdot 1$

۴ $y=f \pm g \pm \dots \rightarrow y'=f' \pm g' \pm \dots$ ۵ $y=f \cdot g \rightarrow y'=f' \cdot g + g' \cdot f$

ex $y=\frac{6}{x^2} - x^2 \sqrt{x} + 4x \rightarrow y'=-\frac{12}{x^3} - 2x \sqrt{x} + 4$

۶ $y=\sqrt{\Delta} \rightarrow y'=\frac{\Delta'}{2\sqrt{\Delta}}$ ۷ $y=\frac{f}{g} \rightarrow y'=\frac{f'g - g'f}{g^2}$

ex $y=\frac{(2x-1)\sqrt{x}}{x^2} \rightarrow y'=\frac{(2-1/2)\sqrt{x} - (2x-1)(1/2\sqrt{x})}{x^4}$

T تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+a}{x-1} & x \geq 2 \\ x^2+ax+b & x < 2 \end{cases}$ روی R مشتق پذیر است. مقدار b کدام است؟

$-\frac{2}{3}(4) \quad -\frac{11}{3}(3) \quad \frac{2}{3}(2) \quad \frac{11}{3}(1) \checkmark$

مشتق تابع مرکب : بتوانید : مشتق دالشل در اِف پریم دالشل ا تمام ()

$y = f(\Delta) \rightarrow y = \Delta' \cdot f'(\Delta)$

T اگر $f(x) = \frac{x^2-2}{1+x^3}$ ، $g(x) = \sqrt{x-1}$ ، حاصل $f'(g(x)) \times g'(x)$ کدما است؟ **کنکور ۹۲**

$\frac{x-2}{x^2}(4)$ $\frac{1}{x^2}(3)$ $\frac{x}{x^2}(2)$ $\frac{x}{x}(1)$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{-2x}$ و $g(x) = (2x+1)^2$ آنگاه مشتق تابع $\text{gof}(x)$ در $x = -2$ را با استفاده از قاعده زنجیری به دست بیاورید.

مثال: اگر در کلاس مشتق‌های توابع زیر را به دست آورید.

$f(x) = (x^2 + 1)^2 (5x - 1)$

$g(x) = \left(\frac{-2x-1}{x^2+5}\right)^4$

شروط مشتق پذیری روی بازه

مشتق پذیری f روی (a, b)	1 f در تمامی نقطه‌های موجود در بازه‌ی (a, b) پیوسته است. 2 f در تک‌تک نقطه‌های این بازه هم، مشتق پذیر است. این جوری هم ببین: تابع f در بازه‌ی (a, b) هیچ نقطه‌ی ناپیوسته و مشتق ناپذیری ندارد...!
مشتق پذیری f روی $[a, b]$	1 f در (a, b) مشتق پذیر است. 2 f در $x = a$ مشتق راست دارد (و البته پیوستگی راست!)
مشتق پذیری f روی $(a, b]$	1 f در (a, b) مشتق پذیر است. 2 f در $x = b$ مشتق چپ دارد (و البته لازم است که پیوستگی چپ هم داشته باشد...!)
مشتق پذیری f روی $[a, b]$	1 f در (a, b) مشتق پذیر است. 2 f در $x = a$ مشتق راست دارد (و البته پیوستگی راست!) 3 f در $x = b$ مشتق چپ دارد (و البته پیوستگی چپ!)

مثال : (مثال کتاب) نمودار $f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ را رسم کنید و مشتق پذیری آن را روی بازه‌های $[-2, 1]$ ، $(1, +\infty)$ و $[1, 2]$ بررسی کنید.

مشتق مرتبه دوم

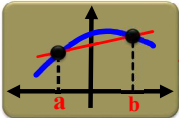
اگر تابع مشتق، مشتق پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم $y = f(x)$ را به صورت $y'' = f''(x)$ (خوانده شود ایکس دو) می‌نویسیم و برای معاشیه آن از تابع y' مشتق می‌گیریم.

مثال: (مثال کتاب) اگر $y = 3x^4 + 2x^2 - 1$ ، آنگاه تابع y' و y'' را بنویسید.

آهنک تغییر متوسط

واحد نقاط سروته بازه است!

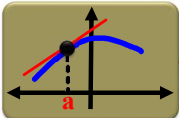
آهنک تغییر متوسط تابع f در بازه $[a, b]$ همان شیب خط



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

آهنک تغییر لحظه‌ای

آهنک تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطه‌ی $x = a$ همان شیب خط مماس بر نمودارش در a است.



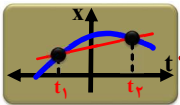
$$f'(a)$$

مثال: (مثال کتاب) تابع $f(x) = \sqrt{x} + 50$ قر متوسط کودکان را x ماه پس از تولد، بر حسب $\frac{\text{cm}}{\text{month}}$ مشخص می‌کند. آهنک متوسط رشد کودک را از ۱ ماهگی تا ۳۶ ماهگی بیابید.

سرعت متوسط

میراثیم (ایشالا!) که سرعت متوسط می‌شود نسبت جابجایی به زمان.

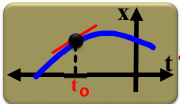
پس در اینجا با تابع $(y = x(t))$ و نمودار مکان بر حسب زمان سروکار داریم!



$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

سرعت لحظه‌ای

باید بدانید که تابع سرعت، مشتق تابع مکان-زمان است!



$$v(t_0) = x'(t_0)$$

مثال: (مثال کتاب یا تغییر) رابطه $h(t) = -5t^2 + 40t$ ارتفاع جسم $h(t)$ ثانیه پس از پرتاب از سطح زمین نشان می‌دهد.

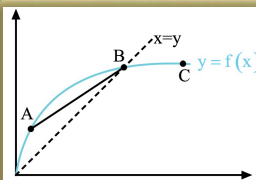
الف) سرعت متوسط جسم در بازه زمانی $[0, 2]$ را بر حسب $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ به دست آورید.

ب) سرعت لحظه‌ای جسم در لحظه $t = 2$ چقدر است؟

ج) جسم چند ثانیه پس از پرتاب، به نقطه اوج می‌رسد؟

(تمرین کتاب) اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ، $f'(2)$ به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

(تمرین کتاب) برای نمودار $y = f(x)$ ، شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



الف) شیب نمودار در نقطه $A \leftarrow m_1$

ب) شیب نمودار در نقطه $B \leftarrow m_2$

پ) شیب نمودار در نقطه $C \leftarrow m_3$

ت) شیب خط $AB \leftarrow m_4$

ث) شیب خط $\leftarrow m_5$

ج) شیب خط $\leftarrow m_6$

(تمرین کتاب) نقاطی مانند **A, B, C, D, E, F, G** را روی نمودار $y = f(x)$ مشخص کنید به طوری که:

(الف) نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

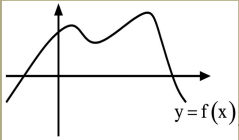
(ب) نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

(پ) نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آن‌ها صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

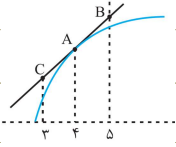
(ت) نقطه‌ای روی منفی است که مشتق در آن‌ها صفر است.

(ث) نقاط **E** و **F**، نقاط متفاوتی روی منفی هستند که مشتق یکسان دارند.

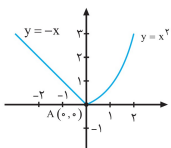
(ج) نقطه‌ای روی منفی است که مقدار تابع در آن‌ها مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.



(تمرین کتاب) برای تابع **f** در شکل روبه‌رو داریم: $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 25$. با توجه به شکل، مقصودات نقاط **A, B** و **C** را بیابید.



(تمرین کتاب) با معادله مشتق راست و مشتق چپ تابع داده شده در نقطه **A**، نشان دهید که این تابع در نقطه **A** مشتق‌پذیر نیست.



(تمرین کتاب) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن،

(الف) در یک نقطه برابر صفر شود. (ب) در $x = 2$ برابر ۳ شود.

(ت) در تمام نقاط یکسان باشد. (ث) در تمام نقاط منفی باشد.

(تمرین کتاب) مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

(تمرین کتاب) اگر $f(x) = |x^2 - 4|$ ، به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری **f** را در نقاطی به طول‌های ۲ و ۲- بررسی کنید.

(تمرین کتاب) اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ مطلوب است، $(f+g)'(1)$ و $(3f+2g)'(1)$

(تمرین کتاب) نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید.

اگر $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ مطلوب است $h'(1)$ و $h'(2)$ ، $h'(3)$.

(تمرین کتاب) اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ ، نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی مشتق موجود نیست.

(تمرین کتاب) مشتق توابع داده شده را بیابید.

$f(x) = (\sqrt{2x+2})(x^2+1)$

$f(x) = \frac{x^2-2x+1}{-2x+2}$

(تمرین کتاب) معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟

(تمرین کتاب) کنیاشن ظرفی ۳۰ لیتر مایع است. در لحظه $t = 0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V = 20(1 - \frac{t}{100})^2$ به دست آید؛

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0, 1]$ چقدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 100]$ می‌شود؟

مشتق توابع مثلثاتی (مخصوص رشته ریاضی)

۱- $(\sin \Delta)' = \Delta' \cos \Delta$

۲- $(\cos \Delta)' = -\Delta' \sin \Delta$

۳- $(\tan \Delta)' = \Delta' (1 + \tan^2 \Delta)$

نکته: در کتاب درسی هرغی از مشتق تابع $\cot$ زده نشده ما هم کاری بهوش نداریم! فقط آله

تو امتحان $\cot$ زیدی نترس! به باش بنویس $\frac{1}{\tan}$ و بعد محاسبات مشتق رو انجام بده

مثال) اگر در کلاس مشتق توابع زیر را به دست آورید.

$f(x) = \sin x \cdot \tan x$

$g(x) = \frac{\Delta \cos x}{1 - \sin x}$

$h(x) = \cos^2 x$

$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

$f(x) = \tan^2(x) - 2 \cos(x)$

$f(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$

$f(x) = \sin x \cos^2 x$

ریاضیت با من



آزمون یکنوایی توابع

اگر در یک بازه تابع f صعودی آید باشد،
در آن بازه علامت مشتق مثبت است.

$f' > 0$

اگر در یک بازه تابع f نزولی آید باشد،
در آن بازه علامت مشتق منفی است.

$f' < 0$

اگر در یک بازه تابع مشتق موجود و صفر
باشد، در آن بازه تابع f ثابت است.

$f' = 0$

مثال: (مثال کتاب) تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در چه بازه‌هایی صعودی آید و در چه بازه‌هایی نزولی آید است؟

نقاط بحرانی

نقطه‌ای $c \in D_f$ را نقطه‌ی بحرانی تابع f می‌گوییم اگر یا $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ تعریف نشده باشد.

توجه اگر دامنه‌ی تعریف تابع f بازه‌ی $[a, b]$ باشد، نقاط a و b بحرانی به حساب می‌آیند.

پدست آوردن نقاط بحرانی از ضابطه

اگر نقطه درونی دامنه $\xrightarrow{A=0} f'(x) = \frac{A}{B}$ باشد، بحرانی هسترا $\xrightarrow{B=0}$ مشتق بگیرا $f'(x)$

T تابع با ضابطه $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$ در $[-1, 1]$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۲(۱)	۳(۲)	۴(۳)	۵(۴)
------	------	------	------

نقاط اکسترمم (نسبی) و مفومش

مینیمم (ماکزیمم) نسبی نقطه‌ی $x = c \in D_f$ را مینیمم (ماکزیمم) نسبی برای تابع f می‌گوییم، هرگاه عرضش کوچکتر (بزرگتر) یا مساوی عرضن نقاط همسایگی آن باشد.

توجه شرط لازم اکسترمم نسبی شرن یک نقطه، وجود همسایگی (راست و چپ) اطراف آن است.

تفسیه فرما: اگر تابع f در نقطه‌ای به فول C اکسترمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c) = 0$ است.

مثال: کنار در کلاس) برای نقاط مشخص شده در هر یک از توابع زیر، نوع اکستریم نسبی، مقدار اکستریم نسبی و مقدار مشتق را در آن نقطه محاسبه کنید.

الف) $f(x) = ||x| - 2|$; $x \in [-5, 3]$

ب) $g(x) = -x^2 - 1$; $x \in [-1, 2]$

آزمون مشتق اول تابع مشتق را درست آورده و تعیین علامت می‌کنیم! علامت مشتق در هر بازه، نوع یکنوایی تابع را مشخص می‌کند! با تعیین جهت یکنوایی در جدول، نقاط اکستریم نسبی مشخص می‌شوند!

مثال: با استفاده از آزمون مشتق اول، نقاط اکستریم نسبی و مقادیر آن‌ها را برای تابع $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$ بیابید.

مینیمم (ماکزیمم) مطلق نقطه‌ای $x=c \in D_f$ را مینیمم (ماکزیمم) مطلق برای تابع f می‌گوییم، هرگاه عرضش کوچکتر (بزرگتر) یا مساوی عرض تمام نقاط دامنه‌اش باشد!

توجه برای اکستریم مطلق شدن، وجود همسایگی اهمیتی ندارد، چون عرضش با کل نقاط مقایسه می‌شود!

توجه هر اکستریم مطلق می‌تواند نسبی هم باشد (چه زمانی؟) و هر اکستریم نسبی می‌تواند مطلق هم باشد (چه زمانی؟)

(فعالیت کتاب) آیا تابع $y = |x^2 - 1|$ در $[-2, 2]$ دارای اکستریم مطلق است؟ در صورت وجود با رسم نمودار مقادیرشان را بیابید!

روش محاسبه اکستریم‌های مطلق تابع **آذر بازه بسته** $[a, b]$

گام اول: مشتق تابع را به دست آورده و نقاط بحرانی آن را می‌یابیم.

گام دوم: مقدار تابع را در هر یک از نقاط بحرانی محاسبه می‌کنیم.

گام سوم: در گام دوم، بزرگ‌ترین عدد به دست آمده، مقدار $\max$ مطلق و کوچک‌ترین آن‌ها، $\min$ مطلق.

(مثال کتاب) نقاط اکستریم مطلق تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$ را در بازه $[-1, 3]$ تعیین کنید.

تشخیص نقاط بحرانی در نمودار رسم یک خط مماس، همه چیز را مشخص می‌کند!

در هر کدام از سه حالت زیر در نمودارها، نقطه بحرانی داریم و لاغیرا ببینید:

۱ خط مماس افقی باشد

مشتق صفر و صفر!

۲ خط مماس قائم باشد

مشتق ناموجود است!

۳ خط مماس قابل رسم نباشد

مشتق ناموجود است!

توجه هر اکستریمی بحرانی است، اما هر بحرانی‌ای اکستریم نیست!

بهینه‌سازی یا optimization

یعنی پیدا کردنِ بهترین حالت! مثل کمترین مقدار برای زمان، هزینه، فاصله یا بیشترین مقدار برای سود

مساحت یا حجم! مسائل بهینه‌سازی معمولا با **بیان فارسی** و **کلمات کمترین یا بیشترین** همراهند

روش حل مسائل بهینه‌سازی با استفاده از رمز **نقتم** !!

۱ ن : **نماگر کناری** رسم شکل (در صورت نیاز) و قرار دادن معلوما و نمادهای مجهولات $\leftarrow X$ و Y

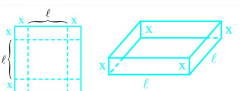
۲ ف : **f** ضابطه‌ی تابعی که قرار است بهینه شود را بنویسید

۳ ت : **تک متغیرش کن!** آله اف دومتغیره بود، تک‌متغیرش کن! (با استفاده از یه رابطه از دل سوال!)

۴ م : **max-min** عرض اکسترمم (حالا یا ماکزیمم یا مینیمم) تابع تک‌متغیره رو درست ییار

مثال: (مثال کتاب) نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن با هم برابر باشند.

مثال (مثال کتاب) مطابق شکل، ورقه‌ی فلزی به طول ۳۰cm را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از گوشه‌ی آن مربع‌هایی کوچک به ضلع x را برش بزنیم و سپس با تا کردن ورق در امتداد خط‌چین‌ها، جعبه‌ای در باز بسازیم. مقدار x بقدر باشد تا حجم قوطی حداکثر شود؟



(تمرین کتاب) بزرگ‌ترین بازه از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x) = x^3 - 12x + 4$ در آن نزولی آید باشد، کدام است؟ چرا؟

(تمرین کتاب) با تشکیل جدول تغییرات تابع $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ ، مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی صعودی آید و در کدام بازه‌ها نزولی آید است؟

(تمرین کتاب) نقاط بحرانی توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

$$g(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

$$h(x) = \sqrt[3]{x}$$

(تمرین کتاب) در تابع زیر ابتدا نقاط بحرانی را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$$

(تمرین کتاب) مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع زیر را در بازه‌های مشخص شده، در صورت وجود به دست آورید.

$$f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 13 \quad ; \quad x \in [-1, 2]$$

(تمرین کتاب) اگر نقطه $(2, 1)$ ، نقطه آکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.

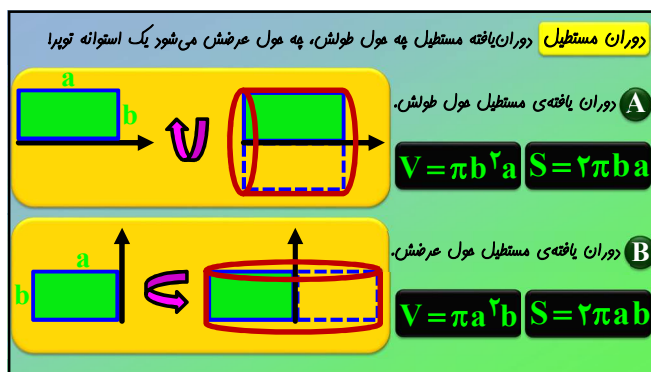
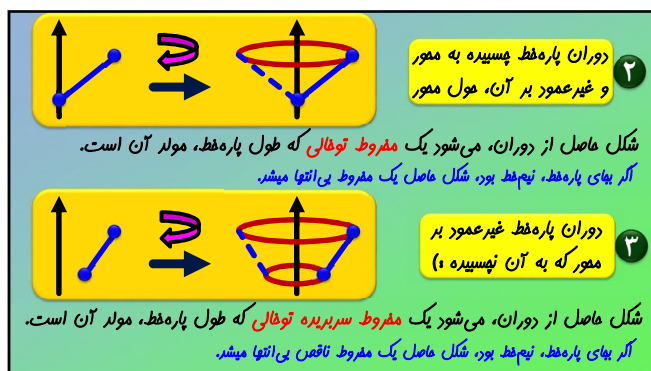
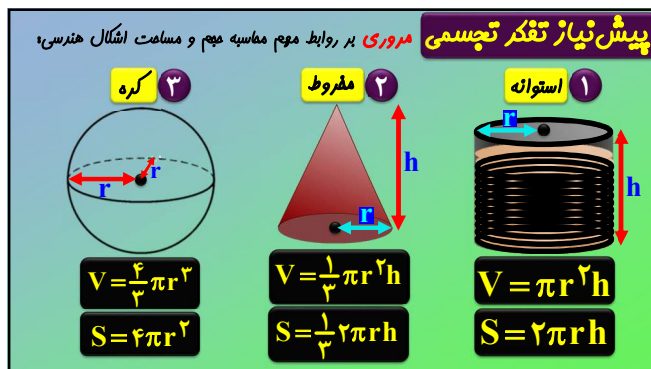
(تمرین کتاب) هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب فیبی، شامل یک متر با مساحت ثابت 3^2 خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است فاصله‌های بالا و پایین هر صفحه ۲ و فاصله‌های کناری هر کرام یک سانتی‌متر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را خوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.

T مجموع اضلاع قائمه مثلث قائم الزاویه ای ۸ است. کمترین مقدار وتر آن چقدر است؟

$\sqrt{2} (4)$ $3\sqrt{2} (3)$ $4\sqrt{2} (2)$ $2\sqrt{2} (1)$

A





دوران مثلث دوران یافته یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه اش می شود یک مخروط توپرا و اما مهم و مسامشتن!

$V = \frac{1}{3} \pi b^2 a$ $S = \frac{1}{3} 2 \pi b a$

T مثلث متساوی الساقینی با طول ساق ۱۳ و قاعده ۱۰ حول ارتفاع وارد بر قاعده اش دوران می کند. حجم شکل حاصل کدام است؟ (۱) 100π (۲) 50π (۳) 200π (۴) 90π

A

الغیای برش **اولا باید برانید** چیزی که شکل را برش می دهد یک صفحه است. فرض کنید یک چاقو شکل را می بُرد. **سطح مقطع** بخشی از صفحه برش دهنده است و در واقع اشتراک این صفحه با شکل هندسی می باشد.

توجه! معمولا یک شکل سه بعدی (مهم فضایی) را می دهند و سطح مقطع حاصل از برش آن شکل توسط یک صفحه را می خواهند! **توجه** به **توپر** یا **توبالی** بودن مهم فضایی در برش همانند دوران مهم است.

توجه! معمولا با برش یک **شکل توبالی**، ممیزی از آن شکل باقی میماند سطح مقطع حاصل یک **ممیز** است. اما با برش یک **شکل توپر**، سطح مقطع حاصل، یک **سطح** از آن شکل است.

برش زدن حجم های معروف **۱ استوانه**

A اگر صفحه برش هم از سقف و هم از کف استوانه بگذرد سطح مقطع یک مستطیل است. $S_{max} = 2r \times h$

B اگر صفحه برش بر محور استوانه عمود باشد، سطح مقطع دایره است. $S = \pi r^2$

B اگر صفحه برش بر محور استوانه عمود نباشد و از سقف و کف استوانه بگذرد، سطح مقطع یک بیضی است.

T دو استوانه هم محور به شعاع های ۱ و ۳ روی هم قرار گرفته اند و ارتفاع هر دو استوانه ۲ است. اگر حجم حاصل را با یک صفحه موازی با محور استوانه ها برش دهیم، بیشترین مساحت سطح مقطع حاصل چقدر است؟ (۱) ۱۲ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

A

در ادامه برش زدن حجم های معروف می رسیم به ۲ مکعب مستطیل

A اگر صفحه برش موازی یکی از وجه های مکعب مستطیل باشد، سطح مقطع یک مستطیل است. $S = a \times b$

B اگر صفحه برش از چهار راسی از مکعب مستطیل که در یک وجه نیستند بگذرد، سطح مقطع یک مستطیل است. $S = b \times \sqrt{a^2 + h^2}$

مثال: (تفاهیت کتاب) سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره به چه شکل است؟ در چه حالتی این سطح مقطع، بیشترین مساحت ممکن را دارد؟

آشنایی با مقاطع مخروطی

۱ صفحه برش از راس بگذرد

تست این شرایط مقطع مخروطی
یا نقطه است، یا یک خط و یا
دو خط متقاطع! بستگی دارد به...

۲ صفحه برش از راس نگذرد

صفحه‌ای برش بر محور عمود نیست و موازی محور نیست. **پیشی**

صفحه‌ای برش بر محور عمود است. **دایره**

صفحه‌ای برش موازی خط محور است. **سوی**

صفحه‌ای برش موازی محور است. **هزلولی**

صفحه‌ای برش بر محور عمود نیست و موازی محور نیست. **پیشی**

صفحه‌ای برش بر محور عمود است. **دایره**

صفحه‌ای برش موازی خط محور است. **سوی**

صفحه‌ای برش موازی محور است. **هزلولی**

تعریف بیضی

مجموعه نقاطی از صفحه مانند M است بطوریکه مجموع فواصل M از دو نقطه ثابت F و F' (کانون‌های بیضی) برابر مقدار ثابت $2a$ است.

مقدار a (پارامتر اصلی بیضی) مثبت است و $MF + MF' = 2a$

پارامترهای بیضی هر بیضی با سه پارامتر a, b, c مشخص می‌شود

قطر بزرگ (کانونی) $AA' = 2a$ و $OA = a$

فاصله کانونی $FF' = 2c$ و $OF = c$

قطر کوچک (تاکانونی) $BB' = 2b$ و $OB = b$

رئوس تاکانونی

رئوس کانونی

ارتباط بین پارامترهای بیضی

$a, b, c > 0$

$a^2 = b^2 + c^2$ & $a > b$ & $a > c$

T در بیضی مقابل که B و B' راس‌های تاکانونی و A راس کانونی است، مثلث $BA'B$ متساوی الاضلاع است. کدام است؟

$\sqrt{3}$ (۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴)

A

خروج از مرکز بیضی

برابر است با $e = \frac{c}{a}$ میزان تپل یا تازگ بودن بیضی را نشان می‌دهد

$0 < c < a \xrightarrow{+a} \frac{0}{a} < \frac{c}{a} < \frac{a}{a} \rightarrow 0 < e < 1$

۱ $0 < e < 1$

۲ هرچه مقدار e به صفر نزدیکتر شود، بیضی تپل‌تر میشود و به دایره شدن میل میکند.

۳ در واقع با کم شدن e ، کانون‌ها بهم نزدیک و نزدیکتر میشوند و c به صفر میل میکند.

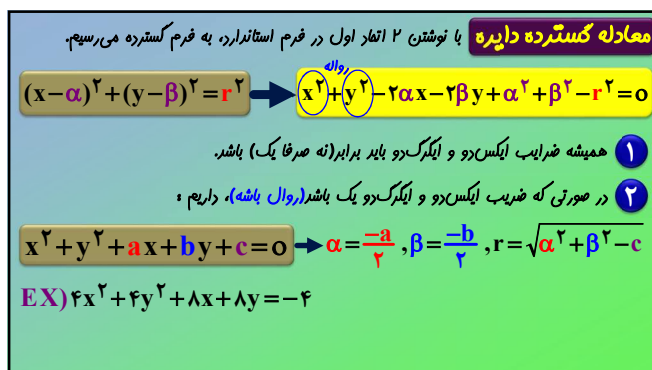
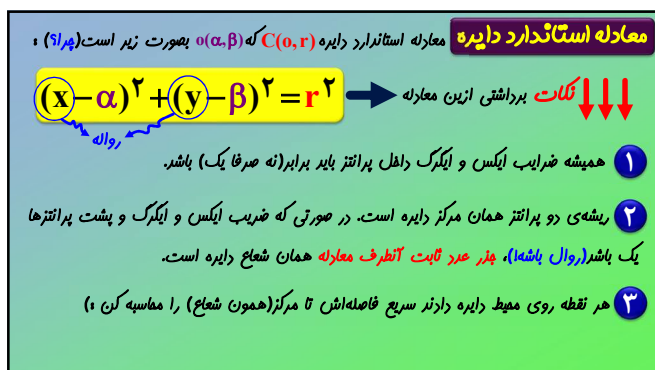
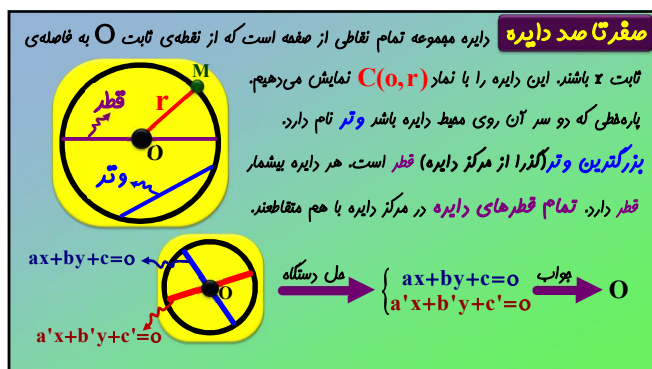
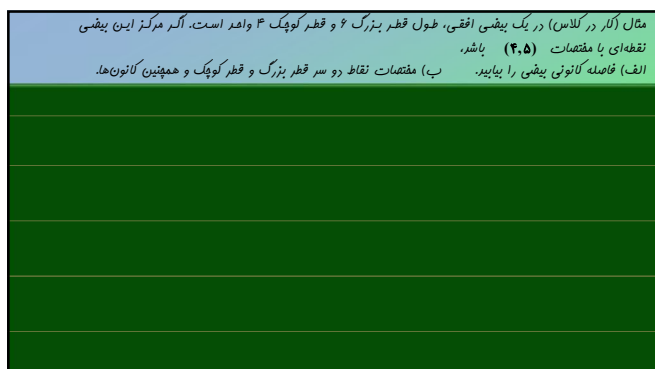
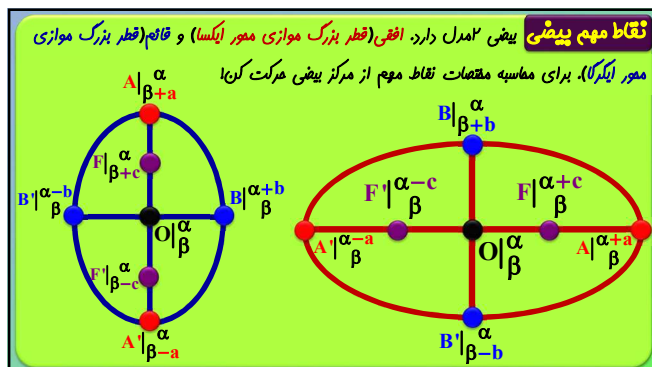
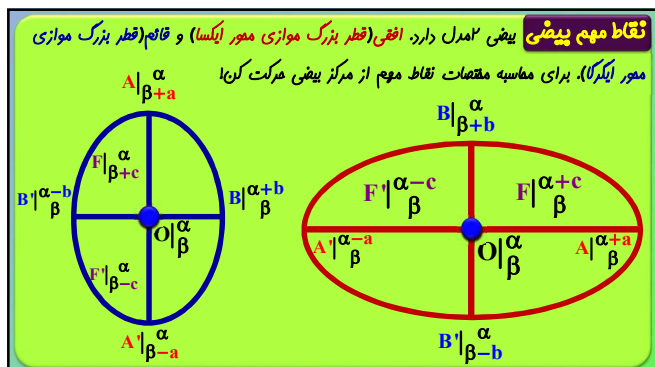
درون و بیرون بیضی

نقطه M نسبت به بیضی یکی از ۳ حالت زیر را میتواند داشته باشد:

۱ روی بیضی است $MF + MF' = 2a$

۲ بیرون بیضی است $MF + MF' > 2a$

۳ درون بیضی است $MF + MF' < 2a$



مثال: آگار در کلاس یا کمی شیفتونی! معادله گسترده دایره‌ای به شکل $۱۲y + ۴x + ۲y^2 - ۲x^2 = ۱۲$ است. مقصود حرکت و شعاع آن را پیدا کنید و معادله دایره را به شکل استاندارد بنویسید.

تعداد مماس‌های قابل رسم بر دایره

- از داخل دایره: ۰
- از روی دایره: ۱
- از خارج دایره: ۲

$AT = AT'$

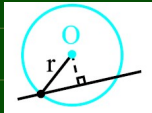
وضعیت خط و دایره

- خط و دایره متقاطعند: $OH < r$
- خط بر دایره مماس است: $OH = r$
- خط و دایره متقاطع نیستند: $OH > r$

مثال: وضعیت دایره $۱۶ = (۲y + ۶)^2 + (۲x - ۴)^2$ و خط $۴x + ۳y - ۳ = ۰$ را نسبت به هم مشخص کنید.

مثال: آگار در کلاس! معادله دایره‌ای را بنویسید که بر خط $۱ = ۴y + ۳x$ مماس بوده و مرکز آن نقطه $C(۱,۲)$ باشد.

مثال: آگار در کلاس! مرکز دایره‌ای، نقطه $O(۲, -۳)$ است. معادله خط، این دایره روی خط $۲ = ۴y + ۳x$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادله این دایره را بنویسید.



۱ متقاطع

$OO' > r + r'$

وضعیت ۲ دایره نسبت به هم

۲ مماس بیرون

$OO' = r + r'$

۳ متقاطع

$|r - r'| < OO' < r + r'$

۵ متداخل

$OO' < |r - r'|$

۴ مماس درون

$OO' = |r - r'|$

۶ هم‌مرکز

$OO' = 0$

۳ متقاطع

$|r - r'| < OO' < r + r'$

مثال: (مثال کتاب) وضعیت دو دایره $x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$ و $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$ را نسبت به هم مشخص کنید و سپس نمودار دو دایره را رسم کنید.

(تمرین کتاب) در شکل زیر می‌خواهیم دوزنقه قائمه را حول محور دوران دهیم.
 الف) حجم شکل حاصل را مناسبه کنید.
 ب) سطح مقطع این شکل با صفحه‌ای که شامل محور دوران باشد، چیست و مساحت آن؟

(تمرین کتاب) اگر یک لوزی با طول قطرهای ۶ و ۳ حول قطر بزرگ دوران داده شود، حجم شکل حاصل چقدر است؟

(تمرین کتاب) کانون‌های یک بیضی نقاط $(۱, ۳)$ و $(۵, -۱)$ است.
 الف) فاصله کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادله قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.
 ب) اگر $a = ۶$ باشد، اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

(تمرین کتاب) خروج از مرکز یک پیشی افقی $\frac{4}{5}$ ، مرکز آن $(-۱, -۴)$ و طول قطر کوچک این پیشی ۶ واحد است.

ب) مقصدهات نقاط دو سر قطر کوچک و قطر بزرگ و لانون‌های پیشی را پیدا کنید.

الف) طول قطر لانوتی و فاصله لانوتی را محاسبه کنید.

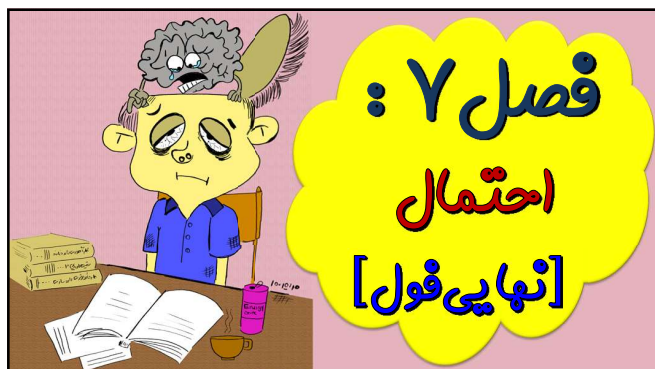
(تمرین کتاب) در حالت‌های زیر معادله دایره را بنویسید:

الف) دایره‌ای که از مبدأ مقصدهات بگذرد و مرکز آن $C(۲, -۱)$ باشد.

ب) دایره‌ای که مرکز آن $(۲, ۲)$ و نقطه $(۹, -۳)$ نقطه‌ای روی آن باشد.

پ) دایره‌ای که نقاط $(۳, ۰)$ و $(-۱, -۴)$ دو سر یکی از قطرهای آن باشند.





یادآوری

۱- پدیده تصادفی، پدیده یا آزمایشی که نتیجه آن را نتوان قبل از انجام، به طور قطعی پیش‌بینی کرد.

۲- فضای نمونه‌ای، مجموعه تمام نتایج ممکن یک پدیده تصادفی را فضای نمونه‌ای آن می‌گوییم و با S نشان می‌دهیم.

۳- پیشامد تصادفی، هر زیرمجموعه‌ای از S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای S می‌نامیم.

۴- پیشامدها و اعمال روی آن‌ها، فرض کنیم A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای باشند، داریم:

الف) اجتماع دو پیشامد، پیشامد $A \cup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.

ب) اشتراک دو پیشامد، پیشامد $A \cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.

پ) تفاضل دو پیشامد، پیشامد $A - B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد، ولی پیشامد B رخ نرهد.

ت) متمم یک پیشامد، پیشامد A' (یا A^c) وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ نرهد $\Rightarrow p(A') = 1 - p(A)$

۵- رابطه مناسبه احتمال وقوع یک پیشامد، $p(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

۶- رابطه مناسبه احتمال اجتماع دو پیشامد A و B ، $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

۷- پیشامدهای تاساگر، دو پیشامد A و B را تاساگر می‌گوییم، هرگاه $A \cap B = \emptyset$ این صورت داریم: $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

۸- تعمیم پیشامدهای تاساگر، پیشامدهای $A_1, A_2, \dots, A_n$ را دو به دو تاساگر می‌گوییم، هرگاه هیچ دو تایی از آن‌ها نتوانند با هم رخ دهند. در این صورت داریم: $p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n)$

۹- احتمال شرطی: $(p(B) \neq 0)$; $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$

۱۰- پیشامدهای مستقل: $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

افراز افراز کردن مجموعه S به این معناست که آنرا به چند زیرمجموعه تقسیم‌بندی کنیم، به‌طوری‌که:

S

A
B

C
D

۱ هیچ زیرمجموعه‌ای تهی نباشد.

۲ هیچ دو زیرمجموعه‌ای با هم اشتراک نداشته باشند.

۳ اجتماع همه‌ی زیرمجموعه‌ها بشود خود S .

T برای مجموعه اعداد طبیعی، از افرازهای داده شده، چند تا قابل قبول است؟

الف) اعداد مضرب ۳ و اعداد زوج (ب) اعداد اول و اعداد مرکب

پ) اعدادی که مربع کاملند، اعداد فرد و مضارب ۵ (ت) اعداد کوچک تر از ۱۳۹۷ و بزرگ تر از ۱۳۹۷

۱) هیچ	۲) یک	۳) دو	۴) سه
--------	-------	-------	-------

مثال (مثال کتاب) کشور ایران به ۳۱ استان افراز شده است.

مثال (مثال کتاب) اگر A مجموعه اعداد طبیعی اول و B مجموعه اعداد طبیعی مرکب و $C = \{1\}$ باشند، در این صورت A و B و C یک افراز روی مجموعه اعداد طبیعی هستند.

مثال (مثال کتاب) مجموعه اعداد گویا و مجموعه اعداد اعظم، یک افراز روی مجموعه اعداد حقیقی تشکیل می‌دهند.

تحت شرایطی...

مفهوم قانون احتمال کل

target

+

×

×

=

۶/۰

قانون احتمال کل

وقتی چند اتفاق پشت سرهم می افتد و از ما احتمال یک پیشامد ساره که بعد از این اتفاقات است را می خواهند، از قانون احتمال کل استفاده می کنیم. به این صورت که مسئله را به صورت درختی حالت بندی می کنیم و در هر شاخه با اعمال پیش شرط، احتمال وقوع پیشامد خواسته شده را مینویسیم! معنویات هر شاخه را در هم ضرب و بعد جواب شاخه ها را با هم جمع می کنیم.

T احتمال انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر، 0.12 و به فرزند دختر 0.08 است. والدینی که حامل این نوع بیماری هستند، انتظار فرزندى را می کشند. چقدر احتمال دارد این فرزند سالم باشد؟

$0.7/1$ $0.8/2$ $0.9/3$ $0.95/4$

(مثال کتاب) ۳ قرقر یکسان داریم. در اولین قرقر ۱۳ مهره قرار دارد که ۳ تى آن ها قرمز است. در قرقر دوم همه مهره ها قرمزند. در قرقر سوم ۸ مهره قرار دارد که ۶ تى آن ها قرمزند و در قرقر چهارم هیچ مهره قرمزى وجود ندارد. با چشم بسته یکی از قرقرها را انتخاب کرده و یک مهره از آن بیرون می آوریم. احتمال اینکه مهره انتخابی قرمز باشد، چقدر است؟

مثال (مثال کتاب) سامان در یک مسابقه شرکت کرده است. سه بسته سوال، یکی شامل ریاضی، یکی اطلاعات عمومی و دیگری ادبیات ارائه شده است. اگر بسته سوال های ادبیات را به او بدهند، به احتمال ۹۰ درصد، اگر بسته سوال های ریاضی را به او بدهند، به احتمال ۶۰ درصد و اگر اطلاعات عمومی به او بدهند، به احتمال ۸۵ درصد پرتنه خواهد شد. در صورتی که با پرتاندن عقربه پرتان در شکل مقابل نوع سوال هایی که به او داده می شود مشخص شود، تعیین کنید او با چه احتمالی پرتنه خواهد شد؟

مثال (مثال کتاب) دو قرقر یکسان داریم. قرقر اول شامل ۶ مهره سبز و ۳ مهره آبی و قرقر دوم شامل ۵ مهره سبز و ۷ مهره آبی است. از قرقر اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده، در قرقر دوم قرار می دهیم. سپس یک مهره از قرقر دوم انتخاب می کنیم. به چه احتمالی این مهره سبز است؟

(تمرین کتاب) فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۲۰ درصد کودک و نوجوان، ۵۰ درصد میانسال و ۳۰ درصد سالمتر باشد و شیوع یک بیماری خاص در این دسته ها به ترتیب ۳ درصد، ۵ درصد و ۱ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلاست؟

(تمرین کتاب) دو چیه داریم. درون یکی از آن ها ۱۳ لامپ قرار دارد که ۶ تا از آن ها معیوب اند، درون چیه دیگر ۹۶ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آن ها معیوب اند. به تصادف چیه ای انتخاب کرده، یک لامپ از آن بیرون می آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر معیوب باشد؟



(تمرین کتاب) یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکه دیگر را با هم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال این که دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود چقدر است؟

نتیجه	تعداد دفعات
۱ سکه رو	
۲ سکه رو	
۳ سکه رو	
۴ سکه رو	
۵ سکه رو	
۶ سکه رو	
۷ سکه رو	
۸ سکه رو	
۹ سکه رو	
۱۰ سکه رو	