

تمام حقوق مادی و معنوی این اثر برای انتشارات فولیتو محفوظ می باشد.

استاد بهنام سرهنگی
مدرس ریاضی فولیتو

بایه یازدهم

دوره دوم متوسطه

بافولیتو فولی تو

ریاضی یازدهم





شیب خط نسبت اختلاف ارتفاع به فاصله‌ی طولی در هر دو نقطه دلفواه از خط می‌شود شیب خط.

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m > 0 \rightarrow$ صعودی
 $m = 0 \rightarrow$ ثابت
 $m < 0 \rightarrow$ نزولی

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha$ زاویه‌ای که خط با جهت + محور ایکس‌ها می‌سازد.

شیب در معادله‌ی صریح $y = mx + d$ ← شیب ایکس = شیب
شیب در معادله‌ی ضمنی $ax + by + c = 0$ ← شیب ایکس = - شیب وای

نوشتن معادله خط کافی است شیب خط و یک نقطه از آن را داشته باشیم!

$m, A \left(\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right) \rightarrow (y - y_0) = m(x - x_0)$ البته گاهی فقط دو نقطه از خط را می‌دهند.

در این سوالات ابتدا شیب را محاسبه کنید. بعد با شیب و یکی از نقاط (دلفواه) معادله خط را بنویسید.

در مثلث ABC با مختصات رئوس $A(2, -3), B(-2, 5), C(-4, 1)$ معادله میانه وارد بر ضلع AC کدام است؟

مثال: مجموع طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط گذرنده از دو نقطه A و B در شکل مقابل به دست آورید.

answer

رسم خط برای رسم خط به دو نقطه از آن نیاز داریم. بهترین راه این است که عرض از مبدأ (x) را صفر می‌دهیم) و طول از مبدأ (y) را صفر می‌دهیم) را درست یابیم این دو نقطه را بهم وصل کنیم.

شرط موازی بودن و عمود بودن دو خط

دو خط با هم موازی‌اند اگر شیب آنها برابر باشد و بر هم عمودتر اگر شیب‌های آنها عکس و قرینه یکدیگر باشد. (یعنی شیب شیب‌های آنها بشود -)

فاصله دو نقطه از هم

$|AB| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

برای مشاهده فیلمهای فصل 1 اینجا کلیک کنید

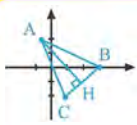
مثال: (تمرین کتاب) وضعیت هر یفت از خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید:

$l: 2x - y = 1$ $d: y = 2x - 3$ $\Delta: x + 2y = 0$

answer

مثال: نقاط $A(-1, 2)$ و $B(3, 0)$ و $C(1, -2)$ مقتضات سه رأس مثلث ABC هستند. معادله ارتفاع AH و طول آن را به دست آورید.

answer



مقتضات وسط پاره خط در واقع وسط یعنی میانگین!

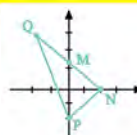
$X_M = \frac{X_A + X_B}{2}$ $Y_M = \frac{Y_A + Y_B}{2}$

مثال: (تمرین کتاب) $A(12, 3)$ و $B(10, -12)$ را در نظر بگیرید. (ب) معادله عمود منصف پاره خط AB را بنویسید. (الف) فاصله مبدأ مقتضات را از وسط پاره خط AB به دست آورید.

answer

مثال: اگر نقاط $P(4, -2)$ ، $N(2, 0)$ ، $Q(-2, 3)$ ، و M باشد. میان PM را محاسبه کنید.

answer



فاصله نقطه از خط معادله خط شما باید ضمنی باشد... داریم:

$A(x_0, y_0)$ $ax + by + c = 0$

$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

فاصله نقطه $A(1, 2)$ از خط گذرنده بر دو نقطه $(-5, 4)$ و $(3, -2)$ کدام است؟

answer

فاصله خط موازی ابتدا همانند بالا معادلات را ضمنی نوشته و ضرایب یکس و وای را یکی می کنیم:

$ax + by + c' = 0$ $ax + by + c = 0$ $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

فاصله بین خط های موازی $y = 2x$ و $4x - 2y + 5 = 0$ کدام است؟

answer

کاربرد معادله درجه ۲ (تغییر متغیر)

$t = \sqrt{x} \rightarrow t^2 - t - 6 = 0$

$(t+2)(t-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = -2 \rightarrow \sqrt{x} = -2 \\ t = 3 \rightarrow \sqrt{x} = 3 \end{cases} \rightarrow x = 9$

مثال: $x - \sqrt{x} - 6 = 0$

در آخر جواب‌ها را چک می‌کنیم که برامان موشکل ایجاد نکنن کسلیم!

مثال: معادله $x^2 - 13(3x^2 - 1) + 22 = 0$ را حل کنید.

answer

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه ۲

اگر $\Delta > 0$ باشد می‌توان جمع و ضرب دو ریشه را از روابط زیر به دست آورد:

sum $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

product $P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

مثال: در معادله $-2x^2 + x + 5 = 0$ بدون حل معادله، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها (P, S) را بیابید.

answer

نوشتن معادله درجه دوم با داشتن S و P

در یک معادله درجه دوم اگر S جمع ریشه‌ها و P ضرب آن‌ها باشد، معادله به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ می‌باشد

مثال: محیط یک زمین مستطیل شکل ۱۸ متر و مساحت آن ۱۴ متر است. اندازه طول و عرض این زمین را تعیین کنید.

answer

ماکزیمم، مینیمم و برد سهمی

if $a > 0 \rightarrow$ سهمی دارای **min** $\rightarrow$ مقدار $y = \frac{-b}{2a}$

if $a > 0 \rightarrow$ دهانه سهمی رو به بالا $\rightarrow R = [y(\frac{-b}{2a}), +\infty)$

if $a < 0 \rightarrow$ سهمی دارای **max** $\rightarrow$ مقدار $y = \frac{-b}{2a}$

if $a < 0 \rightarrow$ دهانه سهمی رو به پایین $\rightarrow R = (-\infty, y(\frac{-b}{2a})]$

مثال: یک ماهیگیر می‌خواهد در کنار رودخانه محوطه‌های مستطیل شکل را قفس‌کشی کند. او تنها هزینه ۱۰۰ متر قفس‌کشی را در اختیار دارد. ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.

answer

نکته: صفرهای تابع درجه ۲: به طور کلی به نقاط برخورد یک تابع با محور Xها، صفرهای آن تابع می‌گویند. چرا که مقدار تابع در آن‌ها می‌شود صفره بی‌شماره!!

تمام حقوق مادی و معنوی این اثر برای انتشارات فولیتو محفوظ می باشد.

مثال: (مثال کتاب) فوتبالیستی توپی را با زاویه ۳۵ درجه نسبت به سطح زمین با سرعت اولیه $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ شوت می کند. مسیر حرکت توپ، هانتز شکل مقابل است که تابع مسیر آن به صورت $y = \frac{1}{4}x^2 + x$ می باشد. نقطه پرشور توپ با زمین را به دست آورید.

answer

مشخص کردن علامت a و b و c از روی نمودار
 $y = ax^2 + bx + c$

۱- علامت a: اگر جهت سهمی رو به بالا بود، $a > 0$ و اگر رو به پایین بود، $a < 0$ است.

۲- علامت c: اگر $X = 0$ مقدار عرض از مبدأ سهمی به دست می آید که می شود $y = c$ پس c همان عرض از مبدأ یا محل برخورد سهمی با محور y است!

۳- علامت b: طول راس سهمی می شود $x = -\frac{b}{2a}$ با توجه به اینکه علامت a را یافته ایم و علامت طول راس سهمی را هم از نمودار خواهیم یافت، علامت b مشخص می شود.

مثلا به سهمی مقابل دقت کنید:

مثال: معادله سهمی های زیر را بنویسید.

answer

answer

معادله گویا

جمع و تفريق هند عبارت گویا

$$\frac{x}{10} + \frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{2x-2} \rightarrow \frac{x}{10} + \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{2(x-1)} = 0 \rightarrow x(x-1) = 10(x-1)$$

$$\rightarrow \frac{x^2 - x + 10 - 5x - 5}{1 \cdot (x-1)} = 0 \rightarrow \frac{x^2 - 6x + 5}{1 \cdot (x-1)} = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=5 \end{cases}$$

روش حل: همه ی عبارات یک طرف ← مخرج مشترک ← صورت برابر صفر ← فاینانل چک!

جواب های پرست آمده را چک میکنیم تا مخرج کسری را صفر نکنند!

FINAL CHECK

مثال: (فعالیت کتاب درسی) معادله $\frac{x}{x^2-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{x-2}{x^2-x}$ را حل کنید.

answer

مستطیل طلایی نسبت طول به عرض برابر $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (مردورا ۱.۶۲) می باشد (نسبت طلایی)

$\frac{X+Y}{X} = \frac{X}{Y}$

مساحت مستطیل طلایی به عرض $\sqrt{2}$ چقدر است؟

معادله کتک

معمولات زیر را در کتاب

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{2x+5} = 1 \rightarrow \sqrt{x+6} = \sqrt{2x+5} + 1$$

طرفین به توان فرجه را در کتاب

$$x+6 = 2x+5+2\sqrt{2x+5}+1 \rightarrow -x = 2\sqrt{2x+5} \rightarrow x^2 = 8x+20$$

$$\rightarrow x^2 - 8x - 20 = 0 \rightarrow (x-10)(x+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=10 \\ x=-2 \end{cases}$$

روشن مل : را در کتاب نتوان کن - به توان فرجه را در کتاب برسون - فایناں چک !

چک کن که آیا جواب های درست آمده در معادله اصلی صدق می کنند؟

FINAL CHECK

معادله $3x = 2 + \sqrt{5x-4}$ را حل کنید.

مثال: اگر در کلاس) بدون حل معادله، توضیح دهید که چرا معادلات زیر فاقد ریشه حقیقی هستند؟

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+3} + 1 = 0 \quad \sqrt{1-x} + \sqrt{x-2} = 0 \quad \sqrt{t} + 2 = 0$$

answer

answer

answer

حل نمونه سوال بیشتر (کتاب + امتحانات گذشته)

(تعمین کتاب) یک میله پریم بزرگ، مطابق شکل توسط کابل هایی به چهار نقطه در زمین مکم شده است، به طوری که فاصله هر نقطه تا میله برابر است با فاصله نقطه ی مقابل آن تا میله. مختصات نقطه D را به دست آورید.

(تعمین کتاب) یکی از اضلاع مربعی بر خط $L: y = 2x - 1$ واقع است. اگر $A(2, 0)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید.

answer

(تعمین کتاب) الف) نشان دهید دو خط با معادلات $5x - 12y + 8 = 0$ و $-10x + 24y + 10 = 0$ با یکدیگر موازیتر. ب) فاصله این دو خط را مناسبه کنید.

answer

تمام حقوق مادی و معنوی این اثر برای انتشارات فولیتو محفوظ می باشد.

(تمرین کتاب) طول پترافیایی تیریز تقریباً ۴۶ درجه شرقی و عرض پترافیایی آن حدود ۳۸ درجه شمالی است. برای راحتی می توانیم موقعیت این شهر را به طور خلاصه، به صورت (۴۶، ۳۸) نشان دهیم. این اطلاعات در مورد پایتخت به صورت (۶۱، ۲۵) است. با فرض اینکه مسافت فیزیکی هر درجه طول پترافیایی همانند مسافت فیزیکی هر درجه عرض پترافیایی برابر ۱۱۰km باشد، مطلوب است محاسبه فاصله تقریبی این دو شهر.

answer

(تمرین کتاب) معادله $x^2 - 8x^2 + 8 = 0$ را حل کنید.

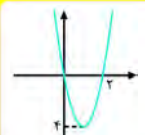
answer

(تمرین کتاب) استاریومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره در دو انتهای آن در حال سافت است. اگر محیط استاریوم ۱۵۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که: الف) مسافت مستطیل در اکثر مقدار ممکن گردد. ب) مسافت استاریوم در اکثر مقدار ممکن شود.

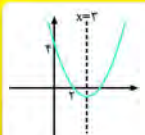


answer

(تمرین کتاب) معادله سهمی های زیر را بنویسید.



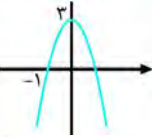
answer



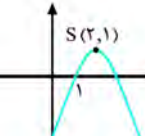
answer



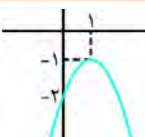
answer



answer



answer



answer

(تمرین کتاب) هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $\frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} = \frac{x-1}{x-2}$

answer

(ب) $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1$

answer

(پ) $\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = 2$

answer

(تمرین کتاب) علی به همراه پدر نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجله ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کند. پس از هفدهمین مطالبه، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش هرور ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بتواند به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

answer

(امتحانات سال گذشته) دو خط به معادله‌های $2x + 3y = 5$ و $3x - 2y = 3$ در نظر بگیرید. a را طوری بیابید که:

(الف) این دو خط با هم موازی باشند. (ب) این دو خط بر هم عمود باشند.

answer

(امتحانات سال گذشته) مقدار m را چنان بیابید که مجموع ریشه‌های معادله $2x^2 - (m+1)x - 3m = 0$ برابر با ۳ باشد.

answer

(امتحانات تیزهوشان ۱۳۰۲) معادله $-7x^3 = 1 - 8x^6$ را حل کنید.

answer

(امتحانات سال گذشته) مثلث ABC را با رئوسهای $A(1,3)$ و $B(1,1)$ و $C(5,1)$ در نظر بگیرید.

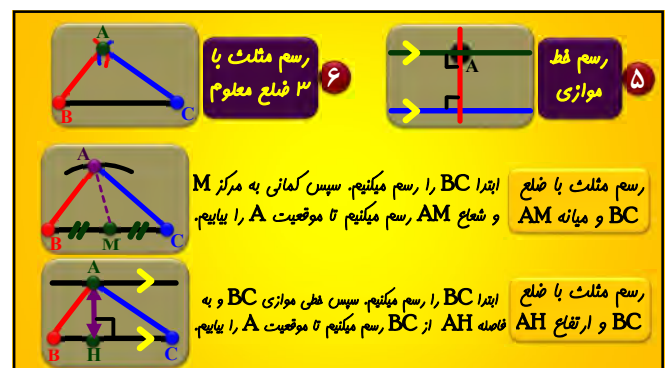
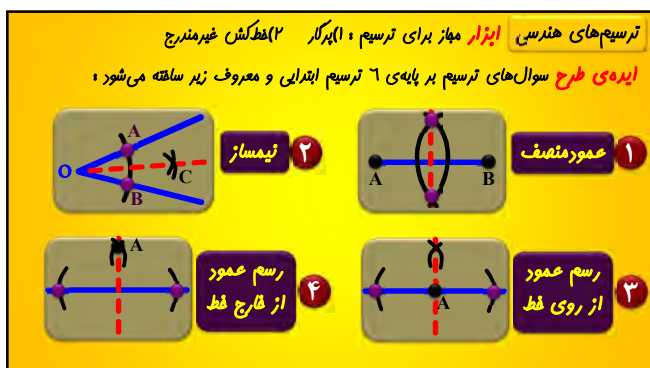
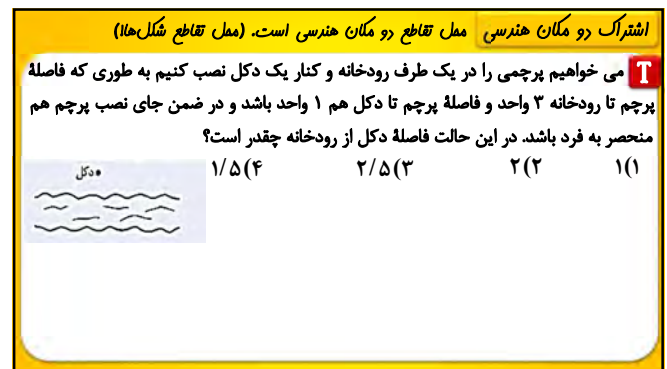
(الف) مقصدرات نقطه M وسط پاره‌قط BC را بیابید. (ب) طول میانه AM را بیابید.

answer

(امتحانات تیزهوشان ۱۳۰۲) معادله خط گذرنده از نقطه $A(2,4)$ را بنویسید به طوری که با خط $y = 2x + 2$

موازی باشد.

answer



برای مشاهده فیلمهای فصل 2 اینجا کلیک کنید

مثال : (مشابه فعالیت کتاب) مثلثی رسم کنید که طول اضلاعش ۵ و ۳ و ۴ واحد طول باشد.

answer

مثال، (تمرین کتاب) مثلثی دلتوا رسم کنید و آن را ABC بنامید. عمودمئصف‌های دو ضلع این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آن‌ها را O بنامید. به مرکز O و به شعاع OA یک دایره رسم کنید. نقاط B و C نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

answer

مثال، (تمرین کتاب) مثلثی دلتوا رسم کنید و آن را ABC بنامید. نیمسازهای دو زاویه این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آن‌ها را O بنامید. از نقطه O بر سه ضلع مثلث عمود رسم کنید و پای یکی از عمودها را H بنامید. به مرکز O و به شعاع OH دایره‌ای رسم کنید. اضلاع مثلث ABC نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

answer



انواع استدلال

- استدلال استقرایی** رسیدن از جز به کل . در واقع با مشاهده‌ی درستی یک حکم در چند مورد مبرود، نتیجه می‌گیریم که حکم به طور کلی صحیح است.
- استدلال استنباطی** از نتایجی که قبلاً درستی آن اثبات شده برای اثبات حکم استفاده می‌شود.
- برهان خلف** بهای اثبات درستی حکم، غلط بودن نقیضش را اثبات می‌کنیم.

روش کر اینگونه است که ابتدا نقیض حکم را نوشته و آن را به عنوان فرض در نظر می‌گیریم. سپس به یک تناقض با فرض یا نتایج درست قبلی میرسیم. (نتیجه : شست اول رو کج گذاشتیم!)

T دانشمندان علوم تجربی از حرارت دادن قطعات مختلف آهنی در آزمایشگاه نتیجه گرفته‌اند که همه فلزات در اثر حرارت، انبساط پیدا می‌کنند». مبنای این نتیجه‌گیری کدام استدلال است؟

(۱) استدلال تمثیلی (۲) استدلال استقرایی (۳) استدلال استنباطی (۴) برهان خلف

(مثال کتاب) حکم «اگر n فرد باشد، آنگاه n فرد است» را به روش برهان خلف ثابت کنید.

صغرتا ۱۰۰ قضیه گزاره: یک جمله‌ی فیزی (درست یا غلط) است.

تعریف قضیه: یک گزاره‌ی همواره درست است که با استدلال استنباطی یا برهان خلف اثبات می‌شود.

فرض و حکم قضیه (باید اثبات شود) $A \Rightarrow B$ **فرض** (شرط مسئله)

عکس قضیه اگر جای فرض و حکم یک قضیه را عوض کنیم، عکس قضیه درست می‌آید. عکس قضیه ممکن است یک گزاره‌ی درست یا غلط باشد. مثلاً عکس قضیه بالا می‌شود: $B \Rightarrow A$

قضیه دوشروطی اگر عکس یک قضیه نیز گزاره‌ای درست باشد، به آن قضیه دو شرطی می‌گوییم.

$A \Leftrightarrow B$ می‌خوانیم (A اگر و تنها اگر B) یا (اگر A آنگاه B و برعکس)

تمام حقوق مادی و معنوی این اثر برای انتشارات فولیتو محفوظ می باشد.

به عنوان مثال جمله‌های زیر همه گزاره‌اند. چون حاوی یک قیاس (درست یا غلط) علی به مدرسه آمد. $1000 \leq$ عدد اول زوج وجود ندارد. اما جملات زیر گزاره نیستند. چون قیاسی را ارائه نمی‌دهند. چه رنگ زیبایی از روی صندلی باشو. آیا قطرهای لوزی بر هم عمودند؟ یک مثلث متساوی‌الساقین رسم کنید.

نقیض یک گزاره

اگر **A** یک گزاره باشد. نقیض **A** می‌شود چیزی که **A** نباشد. ارزش نقیض یک گزاره دقیقاً مقابل ارزش خود گزاره است. در نتیجه اگر گزاره درست باشد. نقیض آن غلط و اگر گزاره غلط باشد. نقیض آن درست است. به عنوان مثال:

الف) گزاره: «۲۳ عددی اول است» نقیض آن: «۲۳ عددی اول نیست»
 ب) گزاره: «**A** از **B** بزرگ‌تر است» نقیض آن: «**A** کوچک‌تر مساوی **B** است»

T کدام قضیه زیر به صورت دو شرطی بیان می‌شود؟
 (۱) هر مربعی، یک لوزی است. (۳) هر دو مثلث مساوی، مساحت‌های مساوی دارند.
 (۲) هر عدد اولی، طبیعی است. (۴) هر دو مربع مساوی، مساحت‌های مساوی دارند.

مثال نقض مثالی است که کلیت درستی یک کلمه را نقض میکند. مثال نقض روشی برای استدلال نیست؛ یعنی نمیتوان درستی یک کلمه را با آن اثبات کرد و فقط مفهومی در کلیت یک کلمه است.

T کدام گزینه مثال نقض ندارد؟
 (۱) به ازای هر عدد صحیح x حاصل $\frac{1}{x^2+1}$ همواره غیرطبیعی است.
 (۲) به ازای هر عدد طبیعی n عدد n^2+n+41 اول است.
 (۳) در هر مثلث قائم‌الزاویه، ضلع مقابل به زاویه 90° نمی‌تواند با اضلاع دیگر برابر باشد.
 (۴) در هر مستطیل، قطرها بر هم عمودند.

مثال: در هر کلام از قضیه‌های زیر، عکس قضیه را بنویسید. (درستی یا نادرستی عکس قضیه مهم نیست).
 الف) قضیه: اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش منصف یکدیگر اند.
 ب) قضیه: اگر دو ضلع از مثلثی با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های نقر آن دو ضلع با هم برابرند.
 ج) قضیه (تالس): در مثلث روبه‌رو داریم: $DE \parallel BC \rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

در مثلث روبه‌رو داریم: $AB = AC$ (فرض)، $CH' = BH$ (کلمه).
 الف) عکس قضیه: اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش منصف یکدیگر اند.
 ب) عکس قضیه: اگر دو ضلع از مثلثی با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های نقر آن دو ضلع با هم برابرند.
 ج) عکس قضیه (تالس): در مثلث روبه‌رو داریم: $DE \parallel BC \rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

نسبت یک کسر است (مخرجش مخالف صفر) $\frac{a}{b}; b \neq 0$

تناسب تساوی ۲ نسبت را یک تناسب می‌گویند. (مخرج همیشه مخالف صفر) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; b, d \neq 0$

T زاویه‌های مثلثی با اعداد ۸، ۵ و ۲ متناسب هستند. اندازه کوچک‌ترین زاویه خارجی مثلث کدام است؟
 (۱) 72° (۲) 82° (۳) 84° (۴) 96°

A

ویژگی‌های تناسب

۱. **طرفین وسطین** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

۲. **ترکیب نسبت‌ها** $\frac{a}{b+a} = \frac{c}{d+c} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

۳. **تفصیل نسبت‌ها** $\frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

۳. **جمع صورت‌ها و مخرج‌ها** $\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$

مثال: (تمرین کتاب) در تناسب زیر مشخص کنید نسبت $\frac{a}{b}$ برابر با چه عددی است؟

$\frac{3a+10}{10+2a} = \frac{3b+7}{7+2b}$

answer

قضیه تالس اگر خطی موازی یک ضلع مثلث رسم شود، دو ضلع دیگر را بصورت متناسب قطع میکند

تالس ۱ نسبتی (تالس چتر په چتر) $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

تالس ۲ نسبتی (تالس چتر په کل) $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ (تعمیم تالس)

در شکل روبه رو، ST موازی BC است. حاصل عبارت $x+y$ کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۷ (کتاب درسی)

مثال: در مثلث ABC، در شکل زیر DE موازی با BC و EF موازی با AC است با دو بار استفاده از قضیه تالس ثابت کنید: $\frac{AD}{DF} = \frac{AE}{FC}$

answer

عکس قضیه تالس اگر خطی در یک ضلع مثلث طوری رسم شود که یکی از نسبت های تالس (۲ نسبتی یا ۳ نسبتی) در آن صدق کند، آنگاه خط با ضلع روبرویش موازی است.

if OR $\left\{ \begin{array}{l} \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \\ \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \end{array} \right. \rightarrow MN \parallel BC$

اثبات عکس قضیه تالس با پرهیز خلف

فرض کنید کلم مسئله غلط باشد و لذا از نقطه D خطی موازی BC رسم می کنیم تا ضلع AC را در نقطه ای مانند E' قطع کند. با توجه به قضیه تالس داریم $\frac{AE'}{E'C} = \frac{AD}{DB}$. با توجه به فرض مسئله نیز که $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$ داشته ایم. از دو نسبت نتیجه می گیریم که $\frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$ با ترکیب این نسبت در مخرج داریم $\frac{AE}{AC} = \frac{AE'}{AC}$. پس $AE = AE'$ پس E بر E' منطبق است و DE همان DE است و این تناقض است. پس از ابتدا فرض غلط بودن کلم مسئله (فرض خلف) نادرست بوده و کلم نمی تواند غلط باشد. یعنی $DE \parallel BC$.

مفهوم تشابه ۲ مثلث

دو مثلث متشابه اند اگر (۱) هر سه زاویه ای آنها نظیر به نظیر برابر و (۲) اضلاع یکی، برابر اضلاع دیگری باشد.

توجه: به K نسبت تشابه دو مثلث گفته می شود. $\frac{1}{K}$ هم نسبت تشابه است. (پهرا)

مالات های تشابه ۲ مثلث

۱) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ & $C = C'$

۲) ض ز ض $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = K$ & $\hat{B} = \hat{B}' = \alpha$

$\rightarrow \frac{AC}{A'C'} = K$ & $A = A'$ & $C = C'$

۳) ض ض ض $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$

$\rightarrow A = A' \text{ \& } C = C' \text{ \& } B = B'$

مثال: در شکل مقابل اندازه پاره‌خط CE برابر ۴۵ سانتی‌متر و $BC \parallel DE$ ، اندازه پاره‌خط‌های AC و DE را به‌دست آورید.

answer

تشابه اجزای فرعی دو مثلث متشابه

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$$

$$\frac{AH}{A'H'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{AM}{A'M'} = k$$

T در مثلث‌های متشابه در شکل داده شده، نسبت ارتفاع‌های نظیر در دو مثلث کدام است؟ (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$

نسبت مساحت و محیط نسبت محیط دو شکل متشابه K و نسبت مساحت آنها K^2 است.

$$\frac{P_2}{P_1} = K \quad \frac{S_2}{S_1} = K^2$$

PROOF $\frac{P_2}{P_1} = \frac{ka+kb+kc}{a+b+c} = \frac{k(a+b+c)}{a+b+c} = k$

PROOF $\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{1}{2}(ka)(h_{ka})}{\frac{1}{2}(a)(h_a)} = \frac{(ka)(kh_a)}{(a)(h_a)} = k^2$

داستان‌های مثلث قائم‌الزاویه و ارتفاع وارد بر وترش

۱ دو مثلث کوچکی که تولید می‌شوند هرکدام با مثلث اصلی و با یکدیگر متشابه‌اند. برای مقایسه نسبت تشابه هر دو مثلث متشابه از نسبت وتر آن دو استفاده کنید.

$$\triangle ABH \sim \triangle ACH \rightarrow K = \frac{c}{b}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle ABH \rightarrow K = \frac{a}{c}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle ACH \rightarrow K = \frac{a}{b}$$

T در مثلث قائم‌الزاویه ای با طول وتر ۴۰، ارتفاع وارد بر وتر را رسم کرده ایم. نسبت مساحت‌های دو مثلث حاصل ۹ گردیده است. مساحت مثلث قائم‌الزاویه اولیه کدام است؟

۱۳۵ (۱) ۱۵۰ (۲) ۱۴۵ (۳) ۱۳۰ (۴)

A

۲ روابط طولی بسیار مهم مثلث قائم‌الزاویه در محور ارتفاع وارد بر وترش از نان شب واجب‌تر است.

$$b^2 = a \times CH$$

$$c^2 = a \times BH$$

$$AH^2 = BH \times CH$$

$$AH \times a = b \times c$$

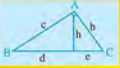
مربع هر ضلع قائمه برابر ضرب وتر در تصویرش بر وتر است.

مربع ارتفاع وارد بر وتر برابر ضرب قطعات ایجاد شده بر وتر است.

اثباتش: به کمک مساحت مثلث اصلی (ینی؟) کلبرد: مقایسه ارتفاع وارد بر وتر با داشتن ۳ ضلع

تمام حقوق مادی و معنوی این اثر برای انتشارات فولیتو محفوظ می باشد.

مثال: با توجه به مثلث روبه‌رو در هر قسمت مقادیر خواسته شده را با کمترین مقدار مناسبه و به‌درست آورید.



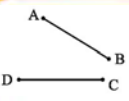
$c = 8, b = 6, h = ?$

$d = 8, e = 3, b = ?, c = ?$

$h = 8, d = 7, b = ?, e = ?$

(تمرین کتاب) الف) دو پاره‌خط AB و CD مطابق شکل داده شده‌اند. نقطه‌ای بیابید که از دو نقطه A و B به یک فاصله و از دو نقطه C و D نیز به یک فاصله باشد.

ب) نقطه مورد نظر در قسمت الف) را O می‌نامیم. اگر O روی عمود منصف پاره‌خط BC باشد و G دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA باشد، راس‌های چهارضلعی $ABCD$ نسبت به دایره G چه وضعیتی دارند؟



answer

(تمرین کتاب) فرض کنید نقطه A به فاصله ۴ سانتیمتر از خط d باشد. روشن رسم هر یک از مثلث‌های زیر را توضیح دهید.

الف) مثلثی متساوی‌الساقین که A یک راس آن و قاعده آن بر خط d منطبق باشد.

ب) مثلثی که شرایط الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ سانتیمتر باشد.

پ) مثلثی که شرایط قسمت الف) را داشته باشد و مساحت آن 12cm^2 باشد.

answer

(تمرین کتاب) در دو زوئنه مقابل $AB \parallel DC$ است. ثابت کنید که $\frac{AS}{SD} = \frac{BT}{TC}$



(راهنمایی: یکی از قطرها را رسم کنید).

answer

(تمرین کتاب) در هر مورد با عوض کردن پای فرض و حکم، عکس آن چه داده شده است، بنویسید.

الف) اگر در مثلثی سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز برابر خواهند بود.

ب) در یک مثلث اگر دو ارتفاع نابرابر باشند، «ضلع متناظر به ارتفاع بزرگتره کوچکتر است از ضلع مقابل به ارتفاع کوچکتره» (شکل یکشیر و به زبان ریاضی بنویسید).

answer

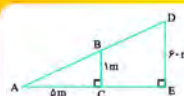
(تمرین کتاب) با پرهان فلغ ثابت کنید نمیتوان از یک نقطه غیرواقع بر یک خط، دو عمود بر آن خط رسم کرد.

answer

(تمرین کتاب) هر یک از کلمه‌های کلی زیر را با یک مثال نقش رد کنید.
الف) هیچ عدد اول بزرگتر از ۱۲۷ وجود ندارد.
ب) در هر مثلث اندازه هر ضلع از اندازه هر ارتفاع بزرگتر است.

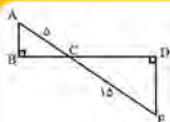
answer

(تمرین کتاب) بر دیوار یک کعب نظامی نورافکنی به ارتفاع ۶۰ متر قرار گرفته است. فوری در نقطه‌ی A قرار دارد و می‌خواهد فاصله خود را تا پایه نورافکن مناسبه کند. برای این کار چوبی به طول یک متر روی زمین قرار می‌دهد و مشاهده می‌کند که طول سایه چوب برابر ۵ متر است. فاصله این مرد تا نورافکن چقدر است؟



answer

(تمرین کتاب) در شکل مقابل دو مثلث قائم‌الزاویه مشاهده می‌کنید. نسبت محیط‌ها و مساحت‌های آن‌ها را به دست آورید.

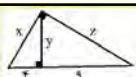


answer

(تمرین کتاب) دو مثلث ABC و A'B'C' را با نسبت تشابه k در نظر بگیرید. به گونه‌ای که $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$ باشد. حال ارتفاع‌های AH و A'H' و A'H' و A'H' را در دو مثلث رسم کنید. الف) ثابت کنید مثلث‌های AHB و A'H'B' متشابه‌اند. ب) نسبت $\frac{AH}{A'H'}$ را به دست آورید. ت) نسبت مساحت‌ها و محیط‌های دو مثلث ABC و A'B'C' را به دست آورید.

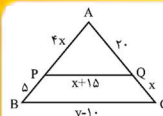
answer

(امتحانات سال گذشته) در شکل زیر مقادیر مجهول را مناسبه کنید.



answer

(امتحانات سال گذشته) در شکل زیر PQ با BC موازی است. مقادیر x و y را مناسبه کنید.



answer



آشنایی با برخی از انواع توابع

توابع گویا: تابعی که ضابطه‌اش به صورت $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ باشد به طوری که $Q(x) \neq 0$ و $P(x)$ و $Q(x)$ دو چند جمله‌ای باشند و $Q(x) \neq 0$

مثلاً توابعی نظیر $y = x^2$ ، $y = \frac{x-1}{x}$ ، $y = 2$ ، $y = \sqrt{x}$ ، $y = \frac{x^2-1}{x^2+5x+2}$ و ... گویا هستند.

دامنه توابع گویا، می‌شود همه اعداد حقیقی، به غیر از آن‌ها که مخرج کسر را صفر می‌کنند.

مثال: عبارت زیر را کامل کنید.

چون مخرج کسر $\frac{1}{x}$ نمی‌تواند باشد، پس نمی‌تواند در دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$ باشد، بنابراین نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ محور را قطع نمی‌کند.

تساوی دو تابع f و g باهم مساویند اگر $D_f = D_g$ و $f(x) = g(x)$

ex $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \end{cases}$

ex $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+1} \\ g(x) = |x^2-1| \end{cases}$

مثال: آیا دو تابع زیر مساویند؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2-1} \\ g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-1} \end{cases}$$

answer

توابع رادیکالی

ساده‌ترین تابع رادیکالی $y = \sqrt{x}$ است که دامنه آن مقادیر بازه $[0, \infty)$ است. نمودار آن که به نمودار آبرویی معروف است به صورت روبه‌رو است. روشن رسم توابع رادیکالی به فرم $y = \sqrt{ax+b}$ ؛ دامنه‌اش را مشخص کن، سپس یک آبرو در دامنه‌اش رسم کن.

مثال: نمودار $y = -2\sqrt{-x+1} + 3$ را رسم کنید.

مفهوم جز صحتیح (پراکت)

جز صحتیح هر عدد می‌شود اولین عدد صحتیح کوچکتر از خودش! نمادش $[]$ است.

ex $[3/7] = 3$

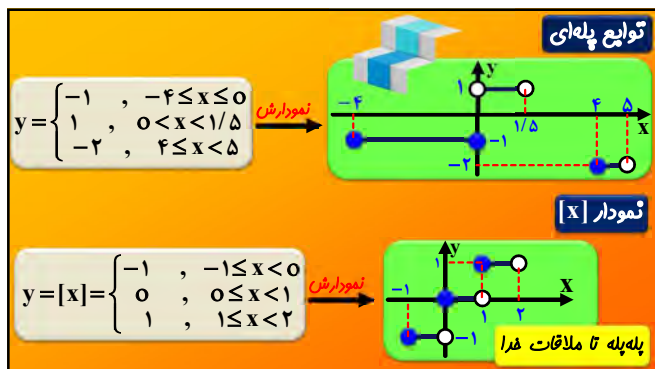
ex if $x > 1$, $[\frac{x^2+1}{x}] = ?$

ex $[-3/3] = -4$

ex $[-6] = -6$ جز صحتیح هر عدد صحتیح می‌شود خودش!

ex if $\sin x \neq 0$, $[1 - \sin^2 x] = ?$

برای مشاهده فیلمهای فصل 3 اینجا کلیک کنید



تابع یک به یک

تشخیص (به) بودن از زوج مرتب

هیچ دو زوج مرتب متمایزی نه مقصودهای اول برابر دارند (برای تابع شدن)، نه مقصودهای دوم برابر (برای یک به یک شدن)

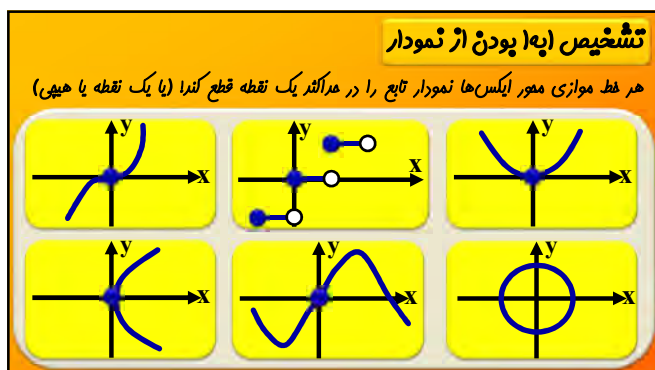
$R = \{(1, 2), (-1, 4), (2, 3), (5, 1)\}$ ✓

$R = \{(1, 2), (-1, 4), (2, 3), (1, 1)\}$ ✗

$R = \{(1, 2), (-1, 4), (2, 3), (3, 3)\}$ ✗

T اگر رابطه $f = \{(3, 2), (a, 5), (2, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$ تابع یک به یک باشد، نمودار تابع $g(x) = ax + b$ محور طول ها را در چه نقطه ای قطع می کند؟ (1) $(\frac{2}{3}, 0)$ (2) $(-\frac{2}{3}, 0)$ (3) $(-\frac{2}{3}, 0)$ (4) $(\frac{2}{3}, 0)$

A



تابع معکوس

هر تابع مانند f یک وارون (f^{-1}) دارد. حالا اگر f^{-1} خود یک تابع باشد می‌گوییم f معکوس پذیر است. (آفه کاهی f^{-1} یک تابع نیست!)

توجه شرط لازم و کافی معکوس پذیری تابع f این است که f یک به یک باشد

محاسبه وارون در زوج مرتب ها جای ایکس (په) و ایکس (پدر مادر) رو عوض کن!

$f = \{(1, 2), (2, 3), (5, 3)\} \rightarrow f^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (3, 5)\}$ ✗

$g = \{(1, 4), (2, 3), (5, 6), (0, 1)\} \rightarrow g^{-1} = \{(4, 1), (3, 2), (6, 5), (1, 0)\}$

توجه $D_f = R_{f^{-1}}$ & $R_f = D_{f^{-1}}$

بدست آوردن نمودار وارون کافی است قرینه‌ی نمودار f نسبت به نیمساز تأیید اول و سوم را به‌دست بیاورید نمودار f^{-1} آماده‌ست! نوش جان!

ex if $f(x)=2x-3$ then $f^{-1}(x)=?$

بدست آوردن ضابطه‌ی f^{-1}

کام اول بهای $f(x)$ بنویسید y و سعی کنید x رو بر حسب y بدست بیارید (x رو تعویض کن!)

کام دوم بهای y بنویسید x و بهای x بنویسید $f^{-1}(x)$ تمام!

ex if $f(x)=\frac{x}{\sqrt{8+9x^3}}$ then $f^{-1}(x)=?$

ex if $f(x)=\frac{1}{8}(3x+1)^3$ then $f^{-1}(x)=?$

ex if $f(x)=\frac{3x-1}{3x-3}$ then $f^{-1}(x)=?$

مثال: تابع وارون تابع زیر را بیابید.

answer

اعمال جبری روی توابع

۱ جمع $D_{f+g}=D_f \cap D_g \rightarrow (f+g)(x)=f(x)+g(x)$ **بردهارو (y) باهم جمع کن!**

EX $f(x)=2x^2-3$ $g(x)=\frac{3x}{x-1} \rightarrow (f+g)(2)=f(2)+g(2)=5+4=9$

۲ تفریق $D_{f-g}=D_f \cap D_g \rightarrow (f-g)(x)=f(x)-g(x)$ **بردهارو (y) از هم کم کن!**

EX $f(x)=2x^2-3$ $g(x)=\frac{3x}{x-1} \rightarrow (f-g)(1)=f(1)-g(1)=??$

EX $f(x)=2\sqrt{x-2}$ $g(x)=\frac{3x}{x+3} \rightarrow (f-g)(x)=2\sqrt{x-2}-\frac{3x}{x+3}; x \geq 2$

۳ ضرب $D_{f \cdot g}=D_f \cap D_g \rightarrow (f \cdot g)(x)=f(x) \cdot g(x)$ **بردهارو (y) در هم ضرب کن!**

EX $f(x)=x^2-6x+8$ $g(x)=\frac{x}{x-2} \rightarrow (f \cdot g)(x)=x^2-6x; x \neq 2$

EX $f=\{(1,2), (-1,4)\}$ $g=\{(1,3), (2,4)\} \rightarrow (2f \cdot g)=\{(1,12)\}$

۴ تقسیم $D_{\frac{f}{g}}=D_f \cap D_g - \{x | g(x)=0\} \rightarrow (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ **بردهارو (y) بر هم تقسیم کن!**

EX $f(x)=x^2-4$ $g(x)=x-2 \rightarrow (\frac{f}{g})(2)=\frac{f(2)}{g(2)}=??$

EX $(\frac{f}{g})(0)=\frac{f(0)}{g(0)}=??$ $(\frac{f}{g})(-3)=\frac{f(-3)}{g(-3)}=-1$

مثال: دو تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$ را در نظر بگیرید. دامنه و شرایط تابع $f \pm g$ ، $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ را بیابید.

answer

مثال: توابع $f(x) = x^2 - 2$ و $g(x) = -2$ داده شده اند. الف) نمودار تابع $g + f$ را رسم کنید. (راه حل نوشته شود). ب) مقدار $(f, g)(\bullet)$ را محاسبه کنید.

answer

انتقال بینیم با هریک از اعمال زیر، نمودار تابع $f(x)$ چگونه انتقال می یابد:

۱ $f(x) + k$
 نمودار $f(x)$ را k واحد و در جهت علامت k روی محور y ها حرکت بدهد
 ex $y = x^3 - 1$

۲ $f(x + k)$
 نمودار $f(x)$ را k واحد در خلاف جهت علامت k روی محور x ها حرکت بدهد
 ex $y = \frac{1}{x-1}$

مثال: نمودار تابع $y = -2(x-1)^2 + 1$ را به کمک انتقال رسم کنید.

answer

۳ $kf(x)$
 عرض نقاط روی نمودار $f(x)$ را k برابر کن (سقف و کف k برابر شه)
 ex $y = -2 \cos x$

۴ $f(kx)$
 طول نقاط روی نمودار $f(x)$ را $\frac{1}{k}$ برابر کن (در واقع دامنه $\frac{1}{k}$ برابر شه)
 ex $y = \sin 2x$

کتاب درسی: نمودار تابع با شرایط $g(x) = -2 + \sqrt{x-4}$ را رسم کنید.

answer

(کتاب درسی) حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید.

الف) $[300/4002]$ **answer**

ب) $[-103/003]$

پ) $[-2309/54]$

(تمرین کتاب) تابع پله‌ای روبه‌رو را رسم کنید.

answer

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \in [0, 1) \\ 0 & x \in [1, 5] \\ 1 & x \in (6, 7] \end{cases}$$

(تمرین کتاب) وارون تابع $f = \{(2, 3)(-2, 1)(-1, 2)\}$ را به دست آورید.

answer

(تمرین کتاب) نمودار وارون تابع داده شده در شکل زیر را رسم کنید.

answer

(تمرین کتاب) وارون تابع $f(x) = \frac{-4x+3}{5}$ را به دست آورید.

answer

(تمرین کتاب) در هر مورد، دامنه و ضابطه حاصل جمع، ضرب، تقسیم و تفریق دو تابع داده شده را بنویسید.

الف) $f(x) = \frac{x-2}{x+5}$ $g(x) = x^2 + 3x - 10$ **answer**

ب) $f = \{(2, 5)(3, 4)(0, -2)\}$ $g = \{(-1, 2)(0, 3)(2, 4)(3, 0)\}$ **answer**

(تمرین کتاب) با استفاده از نمودار تابع یا ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، نمودار تابع $g(x) = 1 - \sqrt{x-2}$ را رسم کنید.

answer

(امتحانات سال گذشته) نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2 - 2$ را رسم کنید.

answer

(امتحانات سال گذشته) مجموعه جواب معادله $[2x-1]=3$ را بنویسید.

answer

(امتحانات سال گذشته) اگر $f(x)=\sqrt{x+3}$ و $g(x)=\frac{2}{x-2}$ دو تابع باشند.

الف) مقدار $2(f-g)(1)$ را به دست آورید. ب) دامنه تابع $(f \times g)(x)$ را به دست آورید.

answer

(تیزهوشان ۱۳۰۲) تابع $y=f(x)$ با دامنه $[-2,1]$ و برد $[-3,4]$ را در نظر بگیرید. دامنه تابع $g(x)=-3f(2x)+1$

answer

(تیزهوشان ۱۳۰۲) اگر تابع خطی f از نقاط $(2,1)$ و $(4,5)$ عبور کند. شایسته وارون آن را به دست آورید.

answer

(امتحانات سال گذشته) تابع $f=(m^2+2,5)(n^2+1,4)$ مفروض است. M و n را طوری تعیین کنید که

برد وارون f ، $\{-7,18\}$ باشد.

answer



واحدهای اندازه گیری زاویه رادیان و درجه...
ارتباط رادیان و درجه $\frac{\pi}{\alpha} = \frac{180^\circ}{d}$
 یک رادیان مربوط به 57.3° درجه است
 π رادیان دقیقاً 180° درجه است

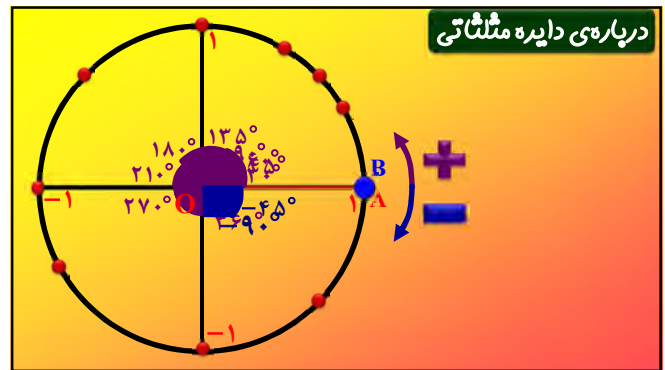
مساحت قطاع
 $\frac{\gamma\pi}{\alpha} = \frac{\pi R^2}{S}$
 $\rightarrow S = \frac{1}{2}\alpha R^2$

طول کمان
 $\frac{\gamma\pi}{\alpha} = \frac{\gamma\pi R}{L}$
 $\rightarrow L = R\alpha$

رادیان
 یک رادیان اندازه زاویه مرکزی روبه رو به کمانی است که طول کمان برابر شعاع دایره است.

مثال: زاویه ۱۰۵- درجه را به رادیان تبدیل نموده و روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

مثال: شخصی در پیست دوچرخه سواری به شکل دایره و به شعاع ۳۵۰۰ متر مسافت $\frac{\gamma\pi}{\alpha}$ کیلومتر را طی می کند. مقدار زاویه ای که پدال دایره است بر حسب درجه تعیین کنید.



نسبت های مثلثاتی در دایره

$-1 \leq \sin x \leq 1$ $\tan x \in \mathbb{R}$
 $-1 \leq \cos x \leq 1$ $\cot x \in \mathbb{R}$

برای مشخص کردن $\sin \alpha$ از انتهای کمان یک عمود بر محور y ها رسم کن!
 برای مشخص کردن $\cos \alpha$ از انتهای کمان یک عمود بر محور x ها رسم کن!
 برای مشخص کردن $\tan \alpha$ انتهای کمان را امتداد بده تا به محور تانژانت برخورد کن!
 برای مشخص کردن $\cot \alpha$ انتهای کمان را امتداد بده تا به محور کوتانژانت برخورد کن!

علامت نسبت ها در ربع های دایره

ربع اول: $\sin x > 0$, $\cos x > 0$, $\tan x > 0$, $\cot x > 0$
 ربع دوم: $\sin x > 0$, $\cos x < 0$, $\tan x < 0$, $\cot x < 0$
 ربع سوم: $\sin x < 0$, $\cos x < 0$, $\tan x > 0$, $\cot x > 0$
 ربع چهارم: $\sin x < 0$, $\cos x > 0$, $\tan x < 0$, $\cot x < 0$

رمز: بار هسته اتم مثبت!
 همه سینوس تانژانت کوسینوس

برای مشاهده فیلمهای فصل 4 اینجا کلیک کنید

نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف						نسبت کمان	
$۳۶۰^{\circ} (۲\pi)$	$۱۸۰^{\circ} (\pi)$	$۹۰^{\circ} (\frac{\pi}{2})$	$۶۰^{\circ} (\frac{\pi}{3})$	$۴۵^{\circ} (\frac{\pi}{4})$	$۳۰^{\circ} (\frac{\pi}{6})$	$۳۶۰^{\circ} / 0 (۲\pi / 0)$	
-1	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	sin
0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	cos
∞	0	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	tan
0	∞	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	cot

سینوس کوسینوس رو واسه هر زاویه حفظ کن! تانژانت و کوتانژانت رو از روشون حساب کن!

دیگه هیچوقت یادت نمیره!

تانژانت کوتانژانت ۳۰° و ۶۰° خیلی قاطی میشن! به راه سریع اینه که فقط تانژانت ۳۰° و ۶۰° رو حفظ کنی! کوتانژانتو بدست ازش بیاری... اما حفظ کردن تانژانت! می‌دونیم تابع تانژانت تو ربع اول آکیدا صعودی! پس مقدار کویکله واسه زاویه کویکت‌تر!

$\cot ۶۰^{\circ} = \tan ۳۰^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\cot ۳۰^{\circ} = \tan ۶۰^{\circ} = \sqrt{3}$

نسبت‌های مثلثاتی $(\frac{k\pi}{2} \pm \alpha)$

ابتدای ربع انحراف به اندازه α از ابتدای ربع

$\sin(\frac{k\pi}{2} \pm \alpha) =$ **نسبت** (α) **علامت**

آله ابتدای ربع داده شده مشرب فرد نور درجه بود، سینوس کوسینوس به هم و تانژانت کوتانژانت به هم تبدیل میشن! در غیر این صورت تغییری رخ نمیره!

بین کمان داده شده در کدام ربع است و علامت نسبت در آن ربع را بدست بیاورید و تمام!

ex $\sin(\frac{3\pi}{4})$

ex $\tan(۳۰۰^{\circ})$

زوایای متمم و مکمل

متمم
if $\alpha + \beta = ۹۰^{\circ}$ $\begin{cases} \sin \alpha = \cos \beta & \cos \alpha = \sin \beta \\ \tan \alpha = \cot \beta & \cot \alpha = \tan \beta \end{cases}$

مکمل
if $\alpha + \beta = ۱۸۰^{\circ}$ $\begin{cases} \sin \alpha = \sin \beta & \cos \alpha = -\cos \beta \\ \tan \alpha = -\tan \beta & \cot \alpha = -\cot \beta \end{cases}$

جمع لوتایی که قرینه همن صغرها

T خلاصه شده $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$ $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ $\cos ۲\alpha(۳)$ $\sin ۲\alpha(۲)$ $-\sin ۲\alpha(۱)$

A

۱) $\sin(۲۱۰^{\circ}) =$

۲) $\cot(۱۳۵^{\circ}) =$

۳) $\cot(\pi + ۲\alpha) =$

تکلیف منفی داخل کمان فقط کوسینوس منفی خوار است!

$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$

Why?

$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha}$

$\cot(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha}$

مثال: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{\cos(-90^\circ) + \sin(-220^\circ)}{\sin(-180^\circ) - \cos(-360^\circ)}$$

فرمولای مقدماتی مثلثاتی

۱ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

EX) if $\sin \alpha = \frac{-1}{4} \rightarrow \cos \alpha = ?$ ($\frac{1.27\pi}{4} < \alpha < \frac{5.14\pi}{4}$)

۲ $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$ ۳ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$

فرمولای
تقره‌ای

۱ $\pm \sin^2 \alpha \rightarrow \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ ۴ $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

۱ $\pm \cos^2 \alpha \rightarrow \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ ۵ $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

مثال: اگر $\cos x = \frac{-4}{5}$ و $\sin x > 0$ سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه x را بیابید.

مثال: اگر $\cot \alpha = -2$ و $\cos \alpha > 0$ سایر نسبت‌های مثلثاتی α را بیابید.

دوره تناوب توابع مثلثاتی

مفهوم دوره تناوب به تابعی که نمودارش به ازای یک طول مشخص تکرار شود تناوب می‌گوئیم.

به کوچکترین طولی که نمودار تابع در آن تکرار می‌شود، دوره تناوب آن می‌گوئیم و با نشان می‌دهیم.

$T \in \mathbb{Q}$

$T=1$ $T=2$

دوره تناوب توابع مثلثاتی

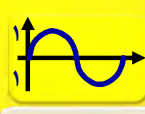
$k \sin(ax+b)+c$ → $T = \frac{2\pi}{|a|}$
 $k \tan(ax+b)+c$ → $T = \frac{\pi}{|a|}$

$k \cos(ax+b)+c$ → $T = \frac{2\pi}{|a|}$
 $k \cot(ax+b)+c$ → $T = \frac{\pi}{|a|}$

T دوره تناوب تابع با ضابطه $f(x) = 2 \sin(\frac{x}{2}) - 1$ با دوره تناوب کدام تابع زیر برابر است؟

$\checkmark f(x) = 2 \tan(\frac{x+2}{\lambda})(2)$ $f(x) = 4 \cos(2x+1) - 2(1)$
 $f(x) = 2 \tan(\frac{x}{2}) - 2(2)$ $f(x) = \sin(\frac{1-2x}{2})(2)$

توابع مثلثاتی $y = \sin x$ ۱


 $y = \sin x$
 $x \in [0, 2\pi]$

$D_{\sin x} = \mathbb{R}$ $R_{\sin x} = [-1, 1]$

EX) $y = 2 \sin(\pi x) - 1$

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید؟

$y = -\sin x + 1$ $y = |\sin x|$ $y = 2 \sin x$

توابع مثلثاتی $y = \cos x$ ۲


 $y = \cos x$
 $x \in [0, 2\pi]$

$D_{\cos x} = \mathbb{R}$ $R_{\cos x} = [-1, 1]$

EX) $y = -2 \cos(-\frac{x}{2}) + 1$

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید؟

$y = \frac{\pi}{2} + 2 \cos(-x)$ $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$

(تمرین کتاب) زاویه D برابر با $\frac{\pi}{2}$ رادیان است. اندازه این زاویه چند درجه است؟

(تمرین کتاب) دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتیمتر مقروض است. اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمانی به طول ۸ سانتیمتر از این دایره چند رادیان است؟

تمام حقوق مادی و معنوی این اثر برای انتشارات فولیتو محفوظ می باشد.

(تمرین کتاب) حاصل هر یک از عبارات‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\cos(-72^\circ) + \cot(-60^\circ) + \tan 72^\circ - \tan(-60^\circ)$

ب) $\cos(-21^\circ) + \cot(24^\circ)$

پ) $\sin 63^\circ + \tan(-54^\circ)$

ث) $\sin(\frac{25\pi}{4}) - \cos(\frac{22\pi}{4})$

ج) $\frac{\sin \frac{7\pi}{4} - \cos \frac{6\pi}{4}}{\sin(-\frac{7\pi}{4}) + \tan(-\frac{7\pi}{4})}$

(تمرین کتاب) با توجه به نمودار توابع سینوس و کسینوس، مشخص کنید هر یک از دو نمودار زیر، کدام یک از ضابطه‌های داده شده را دارند؟ نمودار تابع یا سایر ضابطه‌ها را نیز رسم کنید.

الف) $y = 2 \cos x + 1$

ب) $y = 2 \sin x - 1$

پ) $y = 2 - \cos x$

ث) $y = \sin x - 2$

(تمرین کتاب) با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند؟

الف) شکل روبه‌رو نمودار تابع یا ضابطه $y = \frac{1}{4} \sin x$ را نشان می‌دهد.

ب) شکل روبه‌رو نمودار تابع یا ضابطه $y = \cos x - \frac{1}{4}$ را نشان می‌دهد.

پ) برای رسم نمودار تابع یا ضابطه $y = 1 + \sin x$ کافی است نمودار تابع سینوس را به اندازه یک واحد به موازات محور X انتقال دهیم.

ث) برای رسم نمودار تابع یا ضابطه $y = -\cos x$ کافی است نمودار تابع کسینوس را نسبت به محور X قرینه کنیم.

(امتحانات تیزهوشان ۱۳۰۲) در دایره‌ای به محیط 16π طول کمان مقابل به زاویه 150° چقدر است؟

(امتحانات سال گذشته) مقدار $y = 2 \cos(2x + \frac{\pi}{4})$ را به ازای $x = \frac{\pi}{8}$ به دست آورید.

تمام حقوق مادی و معنوی این اثر برای انتشارات فولیتو محفوظ می باشد.

(امتحانات سال گذشته) اگر $\alpha = \frac{-\sqrt{5}}{5}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، مقدار $\tan \alpha$ را به دست آورید.

(امتحانات تیزهوشان ۱۳۰۲) اگر $\frac{\sin(\frac{\sqrt{2}\pi}{2} + \alpha)}{2\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha - \frac{\delta\pi}{2})} = \frac{1}{2}$ مقدار $\tan \alpha$ را به دست آورید.



تایع نمایی
تایع به فرم $y=a^x$ را نمایی می‌گوییم. (پایه‌اش عدد است و توانش مجهول)

شروط لازم
برای آنکه تایع $y=a^x$ نمایی شود این است که اولاً $a>0$ ثانیاً $a\neq 1$

ویژگی‌ها

بکتوای آکیر ← یک به یک ← معکوس پذیر
دامنه $\mathbb{R}$ ← برد $\mathbb{R}^+$
طول از مبدا ← عرض از مبدا

$y=a^x$ $a>1$
 $y=a^x$ $0<a<1$

مقایسه رشد توابع نمایی
نمودارهای زیر، کویای همه‌ی نکات و جزئیات می‌باشند

فقط قسمتی مثبت نمودارو یاد بگیر، قسمت منفی جوتش برعکسه

مثال: نمودار توابع زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و وضعیت آن‌ها را نسبت به هم مقایسه کنید.
 $y=2^x, y=3^x, y=5^x$

مثال: نمودار توابع زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و وضعیت آن‌ها را نسبت به هم مقایسه کنید.
 $y=(\frac{1}{2})^x, y=(\frac{1}{3})^x, y=(\frac{1}{5})^x$

نکته
وقتی می‌کن فلان تایع نماییه یعنی ضابطش این شکلیه $y=ma^x$

T
جدول زیر مقادیر یک تایع نمایی را مشخص می‌کند، $a+b$ کدام می‌تواند باشد؟

x	۴	۶	b	۶۱۸(۴	۷۲۵(۳	۶۲۵(۲	۶۳۳(۱✓
y	۳۵	۱۲۵	a				

برای مشاهده فیلمهای فصل 5 اینجا کلیک کنید

معادلات نمایی
اگر b یک عدد مثبت باشد و $b^x = b^y$ ، آنگاه $x = y$ و برعکس.

مثال: معادله های زیر را حل کنید.

$$4^{2x-1} = 8^{x+1}$$

$$5^{3x-1} = 125^{2x+1}$$

نامعادلات نمایی
برای حل موفقیت به نامعادله نمایی باید به جهت یکنوازی بودن دقت کنی...

$y = a^x$
 $a > 1$

$X_1 \leq X_2 \Rightarrow a^{X_1} \leq a^{X_2}$
جهت تغییرات x و y یکپه

$y = a^x$
 $0 < a < 1$

$X_1 \leq X_2 \Rightarrow a^{X_1} \geq a^{X_2}$
جهت تغییرات x و y برعکس همدیگر است

مثال: مجموعه جواب نامعادلات زیر را بدست آورید

$$3^{x-3} \leq \frac{1}{(32)^3}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+5} < \left(\frac{1}{3}\right)^7$$

تابع لگاریتمی
معکوس تابع نمایی است، یعنی: $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$
دایره آمه آن: شروط دامنه $y = \log_a B$ می شود: $A > 0$ و $B > 0$ و $B \neq 1$

ویژگی ها
یکنوای آکیر: یک به یک معکوس پذیر
دامنه: $\mathbb{R}^+$ برد: $\mathbb{R}$
طول از میدا: ۱ عرض از میدا: ۰

$y = \log_a x$
 $a > 1$

$y = \log_a x$
 $0 < a < 1$

مثال: (سنجش) دامنه تابع $y = \log_{\left(\frac{25-x^2}{x}\right)}$ شامل چند عدد صحیح است؟

$\log_a 1 = 0$
 $\log_a a = 1$
 $\log_{y^n} x^m = \frac{m}{n} \log_y x$

$\log_a^{xy} = \log_a^x + \log_a^y$
 $\log_a^{\frac{x}{y}} = \log_a^x - \log_a^y$
 $\log_a^b = \frac{\log_c^b}{\log_c^a}$

$\log_a^x = \frac{1}{\log_x^a}$

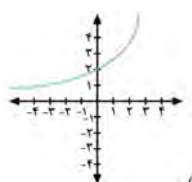
مثال: (مثال کتاب) اگر $\log^2 = 0.3$ و $\log^5$ حاصل را بیابید.

مثال: اگر $\log^5 = 0.7$ و $\log^2 = 0.27$ و $\log^4 = 0.84$ باشد، مقدار $\log \frac{12 \times 7^2}{25}$ را به دست آورید.

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید.
 $\log_3^{(x+1)} + \log_3^{(x+4)} = 2$

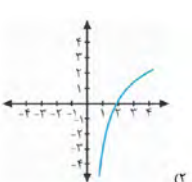
مثال: (فعالیت کتاب) نمودار هر تابع را به ضابطه آن تغییر کنید.

الف) $f(x) = 2^x + 1$



(۱)

ب) $g(x) = \log(x-1)$



(۲)

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$y = -\log^{(x-1)}$

$y = -2^{-x} + 1$

کاربرد لگاریتم در زلزله

انرژی آزاد شده از یک زلزله‌ی M ریشتری را با E نشان می‌دهند

که واحدش یک است و از فرمول روبرو بدست می‌آید:

T در زلزله‌ای به بزرگی $4/8$ ریشتر، مقدار انرژی آزاد شده چقدر است؟

10^{21} (۴) 10^{20} (۳) 10^{19} (۲) ✓ 10^{18} (۱)

A

(تمرین کتاب) کدام گزاره صحیح است؟

الف) نقطه $(\frac{1}{4}, \sqrt{5})$ روی نمودار تابع با ضابطه $y = 5^x$ قرار دارد.

ب) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه $y = 10^x$ با محور y ها، نقطه $(0, 10)$ است.

پ) دامنه توابع با ضابطه های $y = 2^x$ و $y = x^2$ مساوی اند.

ت) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه $y = 6^x$ با محور x ها، نقطه $(0, 6)$ است.

(تمرین کتاب) معادله ی نمایی زیر را حل کنید.

$$9^x = 3^{x^2 - 4x}$$

(تمرین کتاب) حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$3 \log_{10} \sqrt{1000}$$
$$\log_3 27^{\frac{1}{2}}$$

(تمرین کتاب) اگر $f(x) = 3 - 2 \log_2 (\frac{x}{5} - 5)$ مقدار $f(42)$ را به دست آورید.

(تمرین کتاب) اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a x$ از نقطه $(2, 2)$ عبور کند، مقدار a را به دست آورید.

(تمرین کتاب) معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$\log_7 (p^y - 2) = \log_7 p$$
$$\log_8 (x+1) + \log_8 (x-1) = 1$$

(تمرین کتاب) فرض کنیم $g(x) = 2^x + 2$.
الف) $g(-1)$ را به دست آورید. ب) اگر $g(x) = 66$ ، مقدار x چقدر است؟

(تمرین کتاب) نمودار تابع با ضابطه $y = 2^x - 1$ را در بازه $[-2, 2]$ رسم کنید.

(امتحانات سال گذشته) جاهای خالی را پر کنید.
الف) دامنه تابع $y = (\sqrt{2})^x$ برابر و برد آن برابر است.
ب) تابع $y = \log_{2/3} x$ تابعی یک به یک در نتیجه معکوس پذیر
پ) نمودار تابع $y = (\frac{1}{2})^x$ محور عرض ها را در نقطه ای به عرض قطع می کند.
ت) نمودار تابع $y = \log_8 x$ محور طول ها را در نقطه ای به طول قطع می کند.

(امتحانات سال گذشته) تامله $\frac{1}{256} \leq 8^{2p-2}$ را حل کنید.

(امتحانات سال گذشته) حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.
الف) $2 \log_8 2 - \log_8 2 = \log_8 2 + \log_8 2$
ب) $2(\log_2 \sqrt{5} - \log_2 2) = ?$
ج) $\log 15 = ?$ ($\log 2 = a, \log 3 = b$)

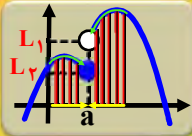
(امتحانات سال گذشته) اگر $\log_c a = \frac{3}{4}$ و $\log_c b = \frac{1}{4}$ باشد، مقدار $\log_b a^{\sqrt{b}}$ را بیابید.



مفهوم حد در راست تابع f در نقطه a را با $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ نشان می دهند.

و مفهومش این است که وقتی x به a نزدیک میشود از مقادیر بیشتر، عرض به L_1 میل میکند

در پیش را هم در این بیندرا



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1 \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$$

تابع f در a حد دارد اگر

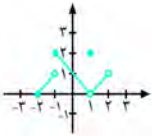
اولا در یک همسایگی اطراف a تعریف شود.

ثانیا مقادیر در راست و پیش در a برابر شود.

ex آیا تابع $y = \sqrt{4-x^2}$ در نقاط به طول ۲، -۱ و ۳ حد دارد؟ اگر بله مقدارش را

توجه در یک تابع در a و مقدارش در این نقطه به هم هیچ ربطی ندارند

مثال: (تمرین کتاب) برای تابع f که نمودار آن داده شده است، کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟



$f(1) = 2$ (پ)

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$ (ت)

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ وجود ندارد

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ (الف)

$f(2) = 1$ (پ)

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$ (ت)

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ (ج)

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ (ج)

مثال: (تمرین کتاب) آیا هر تابع زیر در $x = 2$ موجود است؟

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & x > 2 \\ -2 & x = 2 \\ x-3 & x < 2 \end{cases}$$

مثال: نمودار دو تابع $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$ و $g(x) = 1$ را رسم کنید. آیا $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ موجود است؟ (چرا؟)

$\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ چگونه در چه نقطه‌ای هر دو تابع با هم برابرند؟

برای مشاهده فیلمهای فصل 6 اینجا کلیک کنید

مثال: (تمرین کتاب) اگر $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = -1$ هرهای زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f(x)}{g(x) - 5h(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (h(x))^5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + h(x))$$

محاسبه حدود ← **اصول اربعه سرهنگی**

اولین گام در محاسبه ی هر دو یک جایگزینی درست و اصولی است! به اصول اربعه ی (دکانه) من در محاسبات سری کوش فرا دهید تا از رستگاران این فصل بشیر!

Rule No.1

چند جمله ای نمایی لگاریتمی رادیکالی مثلثاتی

اینجا برامون مهم نیست که $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$ یا $x \rightarrow a$ فوراً رو جایگزینی میکنیم!

توجه وقتی بهای ایکس ها قرار میدهیم a ، درواقع a نسبی را جایگزینی میکنیم نه a مطلق!

ex شکل زیر نمودار تابع f است. با توجه به آن حاصل عد داده شده را بیابید! باتشکر!

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 2x \cos((x-1)\pi)}{2^x - 2 + f(-x-1)} = ?$$

Rule No.2 ← **رقتار درست با جزصعیج**

جزصعیج رو به چشم یه عدد ببینید! یعنی هرهای عد، یه پرآکت زدی اول اونو تعیین مقدار کن!

اگر داخل پرآکت صعیج شه، یکبار دیکه با دقت جایگزینی را تکرار کنید! (فور عد(نه کمتر یا بیشترش))

اگر داخل پرآکت غیرصعیج شه، همان را عساب کنید! (رو جایگزینی کن! پعرش...)

ex $\lim_{x \rightarrow 1/5} |-2x|$

ex $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|-x| + \sin \pi x}{2^x - 2 + \left| \frac{-x}{3} - 1 \right|}$

Rule No.3 ← **رقتار درست با قدرمطلق**

آله بعد از جایگزینی داخل قدر مطلق صفر شه باید تعیین علامت شود! والسلام!

ex $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2| - |-x|}{\sqrt{-x+2}}$

ex $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2-1|}{x[-x+1]+1}$

رفع ابهام $\frac{0}{0}$ (سایه (پاشن بکنه سق سایه))

وقتی $x \rightarrow a$ ، به $(x-a)$ میگوییم عامل صفرساز! با عطف عامل صفرساز از صورت و مفرج

ex $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$ (ابهام $\frac{0}{0}$ را رفع می کنیم!)

روش های رفع ابهام $\frac{0}{0}$

اگر صورت و مفرج چند جمله ای بود، میتوان با استفاده از (اتمارها) یا (تقسیم) صورت و مفرج

(.تجزیه) بر عامل صفرساز (سق سایه)، آنها را تجزیه و عامل صفرساز را از صورت و مفرج خط زدا

ex $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x^2 - 2x + 2}{x^2 - 1}$

۱.۲. ایهام $\frac{0}{0}$ در رادیکال ها رادیکال فرجه ۲، صورت و مخرج ضرب در مزدوج رادیکال ...

رادیکال فرجه ۳، یا رادیکال چاق و لاغر یفتیدر(صورت و مخرج ضرب در در عبارت چاق یا لاغر رادیکال)

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+6} + x}{(x^2 + 8)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{2x+2}}{\sqrt{x+2} - 2}$$

پیوستگی تابع f در a پیوسته است اگر بتوان بدون برداشتن قلم از روی کاغذ نمودارش را آتیا رسم کرد

تعریف ریاضی تابع f در a پیوسته است هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

مثال: نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x-3 & x < 2 \\ -2 & x = 2 \\ -x+2 & x > 2 \end{cases}$ را رسم کنید. سپس وضعیت پیوستگی آن را روی نقاط دامنه اش بررسی کنید.

مثال: مقدار a و b را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} bx-1 & x < 2 \\ a & x = 2 \\ x+a & x > 2 \end{cases}$ در نقطه $x=2$ پیوسته باشد.

پیوستگی راست اگر فقط در راست و مقدار برابر باشند و این دو با هر چه برابر نباشند

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) = L_1 \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_2$$

پیوستگی چپ اگر فقط در چپ و مقدار برابر باشند و این دو با هر راست برابر نباشند

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) = L_2 \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1$$

مثال: تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ با نمودار مقابل را در نظر بگیرید.

الف) کدام یک از درهای $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ موجودند؟

ب) آیا $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ موجود است؟

پ) آیا تابع در $x=2$ پیوسته است؟

تمام حقوق مادی و معنوی این اثر برای انتشارات فولیتو محفوظ می باشد.

پیوستگی روی یک بازه	
نوع بازه	شرط پیوستگی تابع f روی بازه
(a, b)	تابع f باید در تمامی نقطه‌های موجود در این بازه، پیوسته باشد. این جوری هم‌پسین: تابع در هیچ‌یک از نقطه‌های این بازه، ناپیوسته نباشد.
$[a, b)$	تابع f در بازه‌ی باز (a, b) پیوسته باشد و اصلاً در این بازه نقطه‌ی ناپیوستگی نداشته باشد. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$
$(a, b]$	تابع f در بازه‌ی باز (a, b) پیوسته باشد و اصلاً در این بازه نقطه‌ی ناپیوستگی نداشته باشد. $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$
$[a, b]$	تابع f در بازه‌ی باز (a, b) پیوسته باشد و اصلاً در این بازه نقطه‌ی ناپیوستگی نداشته باشد. $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ $f(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$

مثال: تابع f با ضابطه مقابل را در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x < -1 \\ x^2-1 & -1 \leq x < 2 \\ -x+5 & 2 \leq x < 5 \end{cases}$$

الف) نمودار f را رسم کنید. (ب) دامنه و پیر f را به دست آورید.

ج) آیا در دامنه‌اش پیوسته است؟

د) پیوستگی تابع را روی بازه‌های $[-1, 1]$ و $[2, 5]$ بررسی کنید.

(تمرین کتاب) تابع g با ضابطه $g(x) = \begin{cases} -1 & x \in \mathbb{Z} \\ x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار g را در فاصله $[-4, 2]$ رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار g ، هر دو زیر را محاسبه کنید.

$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \dots$

$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} g(x) = \dots$

(تمرین کتاب) نمودار تابع f به صورت زیر است. هرهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$
 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

(تمرین کتاب) با توجه به دامنه تابع، در مورد هر چه تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ در نقطه $x = 1$ چه می‌توان گفت؟

(تمرین کتاب) با توجه به دامنه تابع، در مورد هر راست تابع $f(x) = \frac{x}{[x] - 2}$ در نقطه $x = 2$ چه می‌توان گفت؟

(تمرین کتاب) مقدار b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x = -1$ هر داشته باشد:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + [x] & x < -1 \\ [x]x + b & x > -1 \end{cases}$$

(تمرین کتاب) اگر $f(x) = \frac{[x]}{x}$ ، نمودار f را رسم کنید. آیا $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ موجود است؟

(تمرین کتاب) برای هر ϵ زیر را در صورت وجود مناسبه کنید.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x + 2}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2}{[x] + 1}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{[-x]}$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 [x] - 1}{x - 2}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x}$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$

$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{(x + \pi)(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^2 + 1)}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x - 2|}{x - 2}$

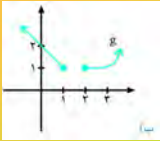
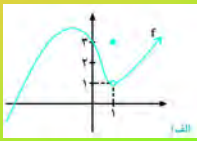
$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$

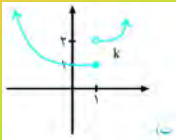
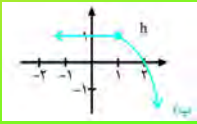
(تمرین کتاب) پیوستگی توابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ p & x = 1 \end{cases}$ و $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ را در $x = 1$ بررسی کنید.

(تمرین کتاب) با توجه به نمودار تابع $f(x) = [x]$ ، در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟

(تمرین کتاب) پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & x \leq 0 \\ x^2 + 2 & x > 0 \end{cases}$ را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید. پیوستگی تابع در نقاط دیگر چگونه است؟

(تمرین کتاب) کدام یک از توابع زیر در $x=1$ پیوسته است؟

(امتحانات سال گذشته) الف) تابع $y = x - [x]$ را رسم کنید و سپس وضعیت پیوستگی آن را در بازه‌های $(0, 1)$ و $(-1, 0)$ بررسی کنید.
 ب) آیا تابع در بازه‌های $(-1, 1)$ پیوسته است؟ چرا؟

(تمرین کتاب) نشان دهید به ازای هیچ مقداری برای a ، توابع زیر در $x=0$ پیوسته نیستند.

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ a & x = 0 \\ 2x+1 & x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{ax}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

(تمرین کتاب) در توابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که هر تابع در $x=1$ پیوسته باشد.

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & x < 1 \\ \frac{x-1}{[x]} + a & x \geq 1 \end{cases}$$

$$k(x) = ([x] - a)[x]$$

(تمرین کتاب) تابع $f(x) = [x]$ در بازه $(2, k)$ پیوسته است. حداکثر مقدار مقدار k چقدر است؟

همسایگی عدد α

بازه‌ای باز شامل عدد α را یک همسایگی برای α می‌گوییم.

این بازه به همسایگی α است اگر $\alpha \in (x_1, x_2) \rightarrow$

همسایگی راست عدد α

بازه‌ای باز شامل اعداد بزرگتر از α .

اگر بازه‌ای (a, b) به همسایگی راست برای α باشد آنگاه $\alpha = a$ & $b > \alpha$

همسایگی چپ عدد α

بازه‌ای باز شامل اعداد کوچکتر از α .

اگر بازه‌ی (a, b) به همسایگی چپ برای α باشد آنگاه

$$\alpha = b \text{ \& } a < \alpha$$

همسایگی محذوف عدد α

مجموعه‌ای شامل اعداد کوچکتر یا بزرگتر از α که خود α از آن حذف شده باشد.

اگر بازه‌ی $(a, b) \cup (c, d)$ به همسایگی محذوف برای α باشد آنگاه

$$\alpha = b = c \text{ \& } a < \alpha < d$$

(تمرین کتاب) تابع f با شایسته $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ را در نظر بگیرید.

الف) دامنه تابع f را به دست آورید.

ب) دامنه تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟

پ) آیا این تابع در همسایگی $9/0$ تعریف شده است؟

ت) آیا تابع f در همسایگی چپ $x=1$ تعریف شده است؟ در همسایگی راست $x=1$ چگونه؟

(تمرین کتاب) اگر بازه $(x-1, 2x+3)$ یک همسایگی 2 باشد، مجموعه مقادیر x را به دست آورید.

مخصوص رشته ریاضی

روشن سوّم؛ اگر $\Delta \rightarrow 0$ آنگاه داریم؛

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta}{\Delta} = 1 \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta}{\sin \Delta} = 1$$

توجه داشته باشید هم‌اکنون چلوی $\sin$ باید با عبارت داخل صورت (یا مخرج) دقیقاً یکی باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 \Delta x}{x^2}$$

روش چهارم (تغییر متغیر): خواست باشد اینجا رو می‌خوانم خودمونی بگم! در مورد یا انجام $\frac{\pi}{2}$ که هم عبارت چپ‌ری داشتی (مثل $2x - \pi$) هم عبارت مثلثاتی (مثل $\cos x$) و کمان به سمت به عبارت دارای π میل می‌کرد تغییر متغیر مسئله را حل کنی. به این صورت که $x - \alpha = t$...

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x - \pi}{\cos x}$$

در محاسبات هری، 2 اتحاد زیر را نیاز بسپارید:

$$1 - \cos 2\Delta = 2\sin^2 \Delta \quad 1 + \cos 2\Delta = 2\cos^2 \Delta$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x - 1}{2x - \pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2\cos 2x}{x \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x + \frac{\pi}{2})}{\cos x - \sin x}$$

$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & x > 0 \\ b - 1 & x = 0 \\ x - 2a & x < 0 \end{cases}$	$x > 0$ $x = 0$ $x < 0$
--	---

(تمرین کتاب) مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ پیوسته باشد.



احتمال شرطی $P(A|B)$ می‌فوانیم احتمال A به شرط B . مفومش این است که B رخ داده ۱ حالا با این شرط، احتمال وقوع A را بیایید. درواقع فضای نمونه‌ای پدر ما می‌شود B و پیشامد مطلوب ما می‌شود $A \cap B$ پس $P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$ و $P(A \cap B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \times P(B)$

تشخیص مسائل احتمال شرطی با کلماتی مانند «اگر» یا «می‌دانیم» شرطی بر روی فضای نمونه‌ای اعمال می‌شود. البته گاهی شرط پنهان است. (پدر احمد ۳ فرزند دارد. احتمال اینکه ۲ دختر داشته باشد کدام است؟)

روش حل مسائل شرطی: شرط گفته شده را روی فضای نمونه‌ای اصلی اعمال می‌کنیم و یک فضای نمونه‌ای پدر می‌سازیم! احتمال را روی فضای نمونه‌ای پدر درست می‌آوریم.

نکته از فرمول احتمال شرطی فقط در دو صورت استفاده کن! یک: اگر فضای نمونه‌ای اصلی در دسترس نباشد. دو: اگر مسئله‌ای احتمال شرطی داده شده از نوع «پدری (قوانین احتمال) باشد».

مثال: پدر مهسا ۳ فرزند دارد. احتمال آن که فقط دو تای آن‌ها پسر باشد کدام است؟

مثال: احتمال وقوع نوعی بیماری در یک جامعه‌ی مشخص برابر 0.04 و احتمال این که فردی هم دچار این بیماری شود و هم درمان‌یابد برابر 0.02 است. اگر فردی به بیماری مذکور دچار شده باشد، احتمال درمان یافتن او چقدر است؟

پیشامدهای مستقل دو پیشامد A و B مستقلند اگر وقوع یا عدم وقوع یکی بر دیگری تاثیری نداشته باشد. مثل پرتاب یک سکه و یک تاس.

تعریف ریاضی دو پیشامد مستقل دو پیشامد A و B مستقلند $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

مثال: در پرتاب یک تاس، فرض کنیم پیشامد A ظاهر شدن عدد زوج، پیشامد B ظاهر شدن عددی بیش از ۳ و پیشامد C ظاهر شدن عددی بزرگ‌تر از ۲ باشد؛ مستقل یا وابسته بودن هر دو تا از این پیشامدها را بررسی کنید.

مثال: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند به طوری که $P(A) = \frac{2}{5}$ و $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ آنگاه $P(B)$ را به دست آورید.

نکته از مستقل بودن هر کدام از ۴ حالت زیر، مستقل بودن ۳ حالت دیگر نتیجه می‌شود

$A \& B \Leftrightarrow A' \& B \Leftrightarrow A \& B' \Leftrightarrow A' \& B'$

EX $P(A \cap B') = P(A)P(B')$ $P(A' \cap B' \cap C) = P(A')P(B')P(C)$

T هرگاه A و B دو پیشامد مستقل باشند به طوری که $P(A) = \frac{1}{4}$ و $P(B) = \frac{1}{4}$ در این صورت حاصل $P(A \cup B')$ کدام است؟ $\frac{1}{4}$ (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{5}{8}$ (۳) $\frac{7}{8}$ (۴)

برای مشاهده فیلمهای فصل 7 اینجا کلیک کنید

سایت رسمی، موسسه : www.fullito.com

ویژگی های میانگین

۱- اگر داده ها را با عدد **C** جمع (یا تفریق) کنیم، میانگین هم با همان عدد جمع (یا تفریق) می شود.

۲- اگر داده ها را در عدد **K** ضرب کنیم، میانگین هم **K** برابر می شود.

$$\bar{x}(kx_i + c) = k\bar{x}x_i + c$$

(یعنی هر بلایی سر داده ها بیارید، سر میانگین و حتی پارک ها هم همون بلا میاردا)

۳- میانگین با داده ها هم واهر است.

$$\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) = 0 \quad \text{یعنی، مجموع "انحرافات داده ها از میانگین" صفر است.}$$

T میانگین داده های $3x_1 - 2, 3x_2 - 2, \dots, 3x_n - 2$ برابر ۲۲ است. $1(1) \quad 3(2)$

میانگین داده های $\frac{x_1}{4} + 1, \frac{x_2}{4} + 1, \dots, \frac{x_n}{4} + 1$ کدام است؟ $5(3) \quad 4(4)$

A

۳۵

معیارها (یا شاخص های) پراکندگی

دامنه تغییرات: دامنه تغییرات ساده ترین شاخص پراکندگی است که اختلاف بین بزرگ ترین و کوچک ترین داده ها

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

را مشخص می کند و با نماد **R** نشان داده می شود.

ویژگی های دامنه تغییرات

۱- دامنه تغییرات، شاقصی سریع اما کم دقت برای بیان پراکندگی داده ها است.

از این جهت کم دقت است که مقدارش فقط به $x_{\max}$ و $x_{\min}$ وابسته است و با تغییر تعداد و

مقدار داده های میانی، مقدار آن تغییر نخواهد کرد.

نتیجه: در صورت وجود داده های دور افتاده، استفاده از دامنه تغییرات به عنوان معیاری برای بیان میزان

پراکندگی داده ها اصلا مناسب نیست.

۲- اگر به همه ی داده ها مقدار ثابت **K** اضافه کنیم، **R** تغییری نخواهد کرد. (با عقل جور درمی آید!! وقتی همه داده ها را

با یک عدد ثابت جمع می کنیم، پراکندگی آن ها نسبت به هم نباید تغییر کند!!)

۳- اگر داده ها را **m** برابر کنیم، دامنه $|m|$ برابر می شود. (چون هم $x_{\max}$ در **m** ضرب می شود هم $x_{\min}$)

$$R_{mx_i + k} = |m| \times R_{x_i}$$

۵- دامنه تغییرات هم واهر داده ها است. (یعنی اگر مثلا داده ها کمیتی طولی یا واهر متر باشند، دامنه تغییرات هم یک

کمیت طولی با واهر متر خواهد بود.)

۶- اگر قطر داده برابر باشند $R = 0$ و اگر برای قطر داده $R = 0$ یعنی داده ها با هم برابرند.

مثال: واریانس داده های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ را حساب کنید.

answer

واریانس (σ^2 ، پخواتید سیگما دو) تعریف واریانس: می شود میانگین هموزور انحرافات از میانگین. داریم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N}$$

گام اول: میانگین داده ها را به دست بیار.

گام دوم: انحراف داده ها از میانگین را حساب کن. $(x_i - \bar{x})$

گام سوم: انحرافات را به توان ۲ برسان. $(x_i - \bar{x})^2$

گام چهارم: میانگین داده های گام سوم (هموزور اختلاف داده ها از میانگین) را حساب کن، همان واریانس داده ها است.

ویژگی های واریانس

۱- اگر چند داده با هم برابر باشند، واریانس آن ها صفر است و اگر واریانس چند داده صفر باشد، آن چند داده یا هم برابرند.

۲- اگر داده های آماری را با عدد ثابتی جمع (یا تفریق) کنید، واریانس این داده ها تغییری نخواهد کرد. به عبارت دیگر:

$$\sigma_{x_i+k}^2 = \sigma_{x_i}^2$$

۳- اگر داده ها را در عدد ثابت m ضرب کنید، واریانس در m^2 ضرب می شود. به عبارت دیگر:

$$\sigma_{mx_i}^2 = (m)^2 \sigma_{x_i}^2$$

$$\sigma_{mx_i+k}^2 = m^2 \sigma_{x_i}^2$$

۵- واهر واریانس برابر با توان دوم واهر داده موردنظر است.

۶- واریانس بزرگ نشان دهنده ی دور بودن داده ها از میانگین و واریانس کوچک نشان دهنده ی نزدیک بودن

داده ها به میانگین است و واریانس صفر هم (همان طور که اشاره شد) نشان دهنده ی برابری داده ها است. پس

واریانس معیار خوبی برای سنجش پراکندگی و تغییرپذیری داده ها نسبت به میانگین است.

انحراف معیار (σ ، بخواهید سیگما)

چتر مثبت واریانس است. پس برای مقایسه آن کافی است واریانس را مقایسه کنید، بعد از آن چتر بگیرید.

فرمول مقایسه انحراف معیار

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

مثال: اگر واریانس داده های b_i برابر ۱۸ باشد و داشته باشیم $b_i = (-3a_i) + 4$ ، واریانس داده های $(2a_i) - 5$ کرام است؟

answer

ویژگی های انحراف معیار

۱- اگر انحراف معیار چند داده صفر باشد، یعنی داده ها برابرند و برعکس. (یعنی اگر چند داده برابر باشند، انحراف معیار آن ها صفر است).

۲- اگر داده ها را با عدد k جمع (یا تفریق) کنیم، انحراف معیار تغییری نمی کند. $\sigma_{x_i+k} = \sigma_{x_i}$

۳- اگر داده ها را در عدد m ضرب کنیم، انحراف معیار در $|m|$ ضرب می شود. (به این دلیل در $|m|$

ضرب می شود که انحراف معیار، چتر مثبت واریانس است و بنابراین مقدار آن همیشه بزرگ تر یا مساوی صفر

$$\sigma_{mx_i} = |m| \sigma_{x_i} \text{ (است.)}$$

$$\sigma_{mx_i+k} = |m| \sigma_{x_i}$$

۵- واهر انحراف معیار از چنس واهر داده ها است.

۶- مقدار انحراف معیار هر چه بزرگ تر باشد، یعنی پراکندگی داده ها حول میانگین پیش تر و هر چه مقدارش کم تر

باشد، یعنی پراکندگی داده ها نسبت به میانگین کم تر است. اما عددی که انحراف معیار می دهد، از عدد واریانس

معقول تر و منطقی تر است.

$$CV = \frac{\sigma}{x}$$

برابر است با نسبت انحراف معیار به میانگین. یعنی:

و $\bar{X}$ با هم برابرین و از صورت و مخرج ساده میشن.)

مثال: اگر انفراف معیار داده‌های $2 + \frac{1}{5}x_1, \dots, 2 + \frac{1}{5}x_n$ برابر باشد، انفراف معیار داده‌های $1 - 5x_1, \dots, 1 - 5x_n$ را به دست بیاورید. تو دلیا

answer

۱- فریب تغییرات مفهومی داده‌های مثبت است.

۲- اگر داده‌ها برابر باشند، ضریب تغییرات صفر است. (چون $\sigma = 0$) و اگر ضریب تغییرات چند داده

صغیر باشد، داده‌ها پیرایه‌مند.

۳- اگر داده‌ها را در عدد ثابت m ضرب کنیم، ضریب تغییرات تغییری نخواهد کرد. چون هم σ و m

$$CV_{mx_i} = CV_{x_i} \quad \text{نسبت به میانگین}$$

۴- اگر داده‌ها را با عدد ثابت k جمع کنیم، CV به صورت منظم تغییر نمی‌کند. چون صورت آن (۱ بدون تغییر باقی می‌ماند و مفرعش $(\bar{X})$ تغییر می‌کند و با K جمع می‌شود.

توجه: اگر داده‌ها، k با عدد ثابت $(k > 0)$ جمع (تفریق) کنیم، CV کاهش (افزایش) می‌یابد.

$$CV_{x_i \pm k} = \frac{\sigma_{x_i}}{x \pm k}$$

$$CV_{mx_i \pm k} = \frac{|m| \sigma_{x_i}}{(mx) \pm k}$$

مثال: فزیریب تغیرات سن دانش آموزان کلاس شما ۱۰ سال بعد چه تغیری خواهد کرد؟

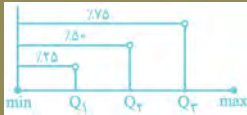
answer

۶- اینکه CV به واهم اندازه‌گیری داده‌ها بستگی ندارد (چون واهم ندارد) یک مزیت برای این شافنس به حساب می‌آید. چون تحت شرایطی که داده‌های مربوط به کمیت در دو جامعه با واهم‌های متفاوت بیان شده باشد و یا

داره‌ها با واحدهایی که نمی‌شناسیم ارائه شده باشند، می‌توان برای مقایسه پراکندگی داده‌ها در دو گروه داده از آن استفاده کرد. (مثلا برای مقایسه پراکندگی اعداد مربوط به قد کلاس **A** و وزن کلاس **B**، مثلا برای مقایسه شرت

نور در دو آزمایش مختلف که با واهر کندها (Candela) بیان شده اند که برای ما ملموس نیست.

چارک‌ها (همان چهار یک به معنی ربع است، فرنگی آن می‌شود Quarter)



چارک اول و دوم و سوم را در نمودار رویه‌رو ببینید.

روش محاسبه چارک‌ها

گام اول: ابتدا میانه (همان Q_2 یا $\tilde{x}$) را به دست آورید.

گام دوم: سپس برای داده‌های مرتب شده قبل از میانه (فرد میانه حساب نیست) یک میانه به دست بیاورید و آن را چارک اول بنامید. (Q_1)

گام سوم: برای داده‌های مرتب شده بعد از میانه (فرد میانه حساب نیست) یک میانه به دست آورید و آن را چارک سوم بنامید. (Q_3)

مثال: چارک‌های اول و دوم و سوم را در هر مورد، به دست آورید.

(الف) ۳ و ۸ و ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ و ۲۱ و ۲۳ (ب) ۳ و ۸ و ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ و ۲۱

answer

۱- (تمرین کتاب) اعداد به احتمال ۷ / ۱۰ در تیم کوهنوردی مدرسه‌اش و به احتمال ۸ / ۱۰ در تیم ملی فوتبال نوجوانان انتخاب می‌شود. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید.
(الف) در هر دو تیم مورد نظر انتخاب شود. (ب) در هیچ کدام از دو تیم انتخاب نشود.
(پ) فقط در تیم ملی انتخاب شود. (ت) فقط در یکی از تیم‌ها انتخاب شود. (ث) حداقل در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

۲- (کتاب درسی) احتمال این که رویا در درس ریاضی قبول شود، دو برابر احتمال آن است که دوستش در این درس قبول شود. اگر احتمال این که حداقل یکی از آن‌ها در درس ریاضی قبول شوند، برابر ۶۲۵ / ۱۰۰۰ باشد، رویا با چه احتمالی در این درس قبول خواهد شد؟

answer

۳- (کتاب درسی) دو تاس با هم پرتاب شده‌اند. احتمال آن که هر دو عدد زوج باشند، به شرط اینکه بدانی مجموع اعداد رو شده برابر ۸ است را به دست آورید.

answer

۴- کتاب درسی، ترکیبی از ۶ ماده شیمیایی داریم که دو تا از آن‌ها مواد **A** و **B** هستند. احتمال واکنش نشان دادن ماده **A** $\frac{1}{5}$ و احتمال واکنش نشان دادن ماده **B** $\frac{1}{4}$ است. اگر ماده **A** واکنش دهد، احتمال واکنش نشان دادن ماده **B** $\frac{1}{4}$ خواهد شد. با چه احتمالی حداقل یکی از مواد **A** یا **B** واکنش نشان خواهد داد؟

answer

۵- (تمرین کتاب) درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید.

الف) اگر مقدار ثابت **C** از داده‌ها کم شود، انحراف معیار به اندازه $\sqrt{C}$ کاهش می‌یابد.

ب) اگر مقدار ثابت **C** داده‌ها اضافه شود، ضریب تغییرات بزرگتر می‌شود.

پ) اگر مقدار ثابت $\frac{1}{C}$ در داده‌ها ضرب شود، انحراف معیار $\frac{1}{C}$ برابر می‌شود.

ث) اگر مقدار ثابت **C** در داده‌ها ضرب شود، ضریب تغییرات ثابت می‌ماند.

۸- (امتحانات سال گذشته) احتمال برد استقلال در برابر پرسپولیس $\frac{7}{10}$ است. اگر هنگام بازی یک تاس و یک سکه هم بیاوریم، احتمال برد استقلال و رو آمدن سکه و کمتر از ۵ آمدن تاس چند است؟

answer

۹- (امتحانات سال گذشته) اختلاف پنج داده آماری از میانگین آن‌ها برابر ۳ و ۲- و ۴- و ۱- و ۱ می‌باشد. واریانس این پنج داده آماری را به دست آورید.

answer

۱۰- (امتحانات سال گذشته) اگر **A** و **B** دو پیشامد مستقل باشند، به شوری که $p(A|B) = \frac{1}{4}$ و $p(B) = \frac{1}{4}$ ، آنگاه $p(A \cup B)$ را بیابید.

answer

۱۱- (امتحانات سال گذشته) یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم؛ پیشامد **A** که در آن تاس عدد فرد بیاید را مشخص کنید.

پیشامد **B** که در آن سکه دروه و تاس عدد کوچکتر از ۵ بیاید را مشخص کنید. آیا این دو پیشامد مستقلند؟ چرا؟

